

 eNote 29

Stokes' rotationssætning

I denne eNote benytter vi Gauss' divergenssætning fra eNote 28 til at motivere, bevise, og illustrere Stokes' sætning, som udtrykker en præcis sammenhæng mellem rotation og cirkulation af et givet vektorfelt: For enhver glat parametriseret flade F_r er fluxen af rotationen af et glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem F_r lig med cirkulationen af vektorfeltet langs randkurven ∂F . Som hermed antydnet får vi brug for både rum-, flade-, og kurve-integraler samt viden om vektorfelter og deres restriktioner til flader og kurver. Det vil sige, at basismaterialet for nærværende eNote skal findes i en række eNoter: eNote 24 (om plan- og kurve-integraler), eNote 26 (om fladeintegraler), eNote 24 (om vektorfelter), eNote 27 (om tangentielle kurveintegraler og cirkulationer), og eNote 28 (om flux-beregninger og Gauss' sætning).

29.1 Stokes' sætning

Stokes' sætning er en af de mest elegante og mest benyttede resultater fra analysen af vektorfelter i rummet. Sætningen har ligesom Gauss' divergenssætning mangfoldige anvendelser - f.eks. i fluid mekanik og i elektromagnetisme.

Her er et citat som fortæller lidt om historien bag resultatet:

The history of Stokes' Theorem is clear but very complicated. It was first given by Stokes without proof - as was necessary since it was given as an examination question for the Smith's Prize Examination of that year [at Cambridge in 1854]! Among the candidates for the prize was Maxwell, who later



Figure 29.1: George Gabriel Stokes. Se [Biografi](#).

traced to Stokes the origin of the theorem, which by 1870 was frequently used. On this see George Gabriel Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, vol. V (Cambridge, England, 1905), 320–321. See also the important historical footnote which indicates that Kelvin in a letter of 1850 was the first who actually stated the theorem, although others as Ampère had employed "the same kind of analysis ... in particular cases."

M. J. Crowe, [A history of vector analysis, 1967], s. 147.



Figure 29.2: James Clerk Maxwell ([Biografi](#)), William Thomson (Lord Kelvin) ([Biografi](#)), og André-Marie Ampère ([Biografi](#)).

Som antyd det er Stokes' resultat af samme kaliber som Gauss' divergens-sætning. De er begge to medlemmer af en 'familie' af resultater, hvor hovedideen er at omskrive et

integral over et område til en andet integral over områdets rand - altså så at sige 'skubbe integrationen ud på randen'. Det ældste medlem af den familie er Integralregningens fundamental-sætning, jvf. sætning 23.13 eNote 23 som vi gentager her med følgende formulering:

||| Sætning 29.1 Integralregningens fundamentalsætning

Lad $f(u)$ betegne en kontinuert funktion på $\mathbb{R}$. Så er følgende funktion differentiabel

$$A(x) = \int_0^x f(u) du \quad \text{med} \quad A'(x) = f(x) \quad . \quad (29-1)$$

Hvis $F(x)$ er en (anden) funktion, som opfylder $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) \quad . \quad (29-2)$$

Her er nu formuleringen af Stokes' sætning:

||| Sætning 29.2 Stokes' sætning

Lad F_r betegne en glat parametriseret flade med randkurven ∂F_r og enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_F$ og lad $\mathbf{V}$ være et glat vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. Så gælder

$$\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu \quad . \quad (29-3)$$

Ved beregning af højresiden skal orienteringen (givet ved retningen af enhedstangentvektorfeltet $\mathbf{e}_{\partial F}$) af randen vælges således at krydsproduktet $\mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra fladen langs med randen.



Stokes' sætning udtrykker altså – ligesom (29.1.2) – at et indre integral (her på et fladestykke) kan udtrykkes som et rand-integral (langs fladestykkets rand). Stokes' sætning kan også formuleres som følger, idet vi henviser til definitionerne af flux og cirkulation i henholdsvis eNote 28 og eNote 27:

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) \quad . \quad (29-4)$$

Det vil sige: Fluxen af *rotationen af* vektorfeltet $\mathbf{V}$ igennem fladen F_r er lig med *cirkulationen* af vektorfeltet langs fladestykkets lukkede randkurve ∂F .



Læg mærke til, at hvis F_r er *hele* overfladen af et rumligt område, så er $\partial F = \emptyset$, og derfor følger det af Stokes' sætning at

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = 0 \quad (29-5)$$

i overensstemmelse med den følgesætning fra Gauss' divergenssætning som er nævnt i sætning 28.15 i eNote 28.

29.2 Motivering af – og et bevis for – Stokes' sætning

Vi får brug for følgende resultat, som også er nævnt i afsnit 26.4 i eNote 26:

|||| Sætning 29.3

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ og $\mathbf{W}(x, y, z)$ betegne to vektorfelter i $\mathbb{R}^3$. Så gælder følgende identitet

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{W}) \quad . \quad (29-6)$$

Specielt har vi derfor: Hvis $\mathbf{W}$ er et gradient-vektorfelt for en funktion $\psi(x, y, z)$ i $\mathbb{R}^3$, dvs. $\mathbf{W} = \nabla(\psi)$, så får vi fra $\mathbf{Rot}(\nabla(\psi)) = \mathbf{0}$:

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) \quad . \quad (29-7)$$

Ved at bruge Gauss' divergens-sætning (sætning 28.15 eNote 28) i forbindelse med (29.2.7) får vi direkte et interessant resultat om integraler over rumlige områder således:

|||| Sætning 29.4 En konsekvens af Gauss' divergenssætning

Lad $\psi(x, y, z)$ betegne en glat funktion og $\mathbf{V}(x, y, z)$ et glat vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$.

Så har vi direkte fra Gauss' sætning 28.15:

$$\int_{\Omega} \text{Div}(\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \times \nabla(\psi)) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} d\mu \quad . \quad (29-8)$$

Ved brug af (29.2.7) har vi derfor også

$$\int_{\Omega} \text{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(\psi) d\mu \quad . \quad (29-9)$$



På højresiden i ligning (29.2.9) har vi benyttet, at rumproduktet $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ af tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$ tilfredsstiller følgende identiteter (hvoraf vi har brugt den første):

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{cab}] = [\mathbf{bca}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}] \quad . \quad (29-10)$$

Specielt får vi den totale rotationsvektor af vektorfeltet $\mathbf{V}$ i Ω således:

|||| Følgesætning 29.5 Totale rotation i et rumligt område

Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$. Så gælder for ethvert glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\int_{\Omega} \text{Rot}(\mathbf{V}) d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V} d\mu \quad . \quad (29-11)$$

|||| Bevis

Dette følger direkte af (29.2.9) ved at vælge, skiftevis, $\psi(x, y, z) = x$, $\psi(x, y, z) = y$, og $\psi(x, y, z) = z$, således at $\nabla(\psi)$ er henholdsvis $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, og $(0, 0, 1)$.

Højresiden af ligningen (29.2.11) vil vi tillade os at kalde *den totale vridning* af fladen $\partial\Omega$ med vektorfeltet $\mathbf{V}$ med hensyn til normalvektorfeltet $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ og i øvrigt betegne denne vektor med $\mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial\Omega)$ således:

|||| Definition 29.6 Vridning

Lad F_r betegne en glat flade i rummet med standard enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_F$, og lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et glat vektorfelt. Så definerer vi vridningen af F_r med vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ på følgende måde:

$$\mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, F_r) = \int_{F_r} \mathbf{n}_F \times \mathbf{V} \, d\mu \quad . \quad (29-12)$$

Generelt er den totale rotation af et givet vektorfelt i et rumligt område (også kaldet 'total vorticity' i fluid mekanik) altså – via 29.5 – lig med vridningen af områdets overflade med vektorfeltet. Dette minder meget om Gauss' tilsvarende identitet for den totale divergens af et glat vektorfelt, sætning 28.15: Den totale divergens af vektorfeltet i et område er lig med fluxen af vektorfeltet ud igennem overfladen af området.

I lighed med sætning 28.13 har vi da også følgende tolkning og konstruktion af rotationsvektoren i et givet punkt:

|||| Sætning 29.7

Rotationen af et vektorfelt udtrykker *den volumen-relative lokale vridning af overfladen* for vektorfeltet i følgende forstand: Lad K_ρ betegne en massiv kugle med radius ρ og centrum i punktet (x_0, y_0, z_0) . Så gælder:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\text{Vol}(K_\rho)} \mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) \right) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) \quad . \quad (29-13)$$

Sætning 29.7 indses på samme måde som for den analoge identitet for divergensen. Vektorfeltet udvikles til første orden med udviklingspunkt p og indsættes i vridningsudtrykket, hvorefter følgende identiteter benyttes:



$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\rho} x \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z \, d\mu = 0 \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} x^2 \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y^2 \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z^2 \, d\mu = (4\pi/3)\rho^4 = \rho \operatorname{Vol}(K_\rho) \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} xy \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} xz \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} zy \, d\mu = 0 \quad . \end{aligned} \tag{29-14}$$

De eneste partielle afledede af vektorfeltets koordinatfunktioner, der ikke integreres væk, er præcis dem, der optræder i rotationsvektoren $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})$ når denne evalueres i p . Prøv det!

|||| Eksempel 29.8 Lokal vridning af kugleflade giver rotationsvektoren

Vi ser på et roterende vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Dette felt har den konstante rotation $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}) = (0, 0, 2)$. Vi vil vise, hvordan $\mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho)$ netop giver denne rotation i punktet $(0, 0, 0)$. Lad altså K_ρ betegne den kugleflade, der har radius ρ , centrum i $(0, 0, 0)$, og overflade ∂K_ρ med udadrettet normalvektorfelt $\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}(x, y, z)$. Så er

$$\begin{aligned} \mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) &= \int_{\partial K_\rho} \mathbf{n}_{\partial K} \times \mathbf{V} \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial K_\rho} (x, y, z) \times (-y, x, 1) \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial K_\rho} (y - xz, -x - yz, x^2 + y^2) \, d\mu \\ &= (0, 0, 2 \operatorname{Vol}(K_\rho)) \\ &= \operatorname{Vol}(K_\rho) \mathbf{Rot}(\mathbf{V})(0, 0, 0) \quad , \end{aligned}$$

i overensstemmelse med sætning 29.7.



I mere komplicerede tilfælde kan den totale vridning af en flade med et givet vektorfelt beregnes med Maple. Hvis den aktuelle flade er randoverfladen af et givet rumligt område kan vridningen også beregnes som integralet af det tilhørende rotationsvektorfelt over det rumlige område. Derved muliggøres naturligvis også konkrete eftervisninger af ligning (29.2.11).

29.2.1 Fladen, randen, og normal-vektorfeltet

De flader, der betragtes i Stokes' sætning er parametriserede på sædvanlig vis:

$$F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad (29-15)$$

hvor

$$(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2. \quad (29-16)$$

Randen $\partial F_{\mathbf{r}}$ af $F_{\mathbf{r}}$ fremkommer ved at bruge vektorfunktionen $\mathbf{r}$ på de 4 rette linjestykker, der udgør randen ∂D af det rektangulære parameterområde $D = [a, b] \times [c, d]$. Vi parametriserer hele ∂D på én gang ved hjælp af en parameter θ og en vektor-funktion $\mathbf{d}$:

$$\partial D : \quad \mathbf{d}(\theta) = (u(\theta), v(\theta)) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2, \quad \theta \in I \subset \mathbb{R},$$

hvor $u(\theta)$ og $v(\theta)$ kun er stykkevis differentiable funktioner af θ . De kan f.eks. vælges som lineære funktioner af θ for hvert enkelt af de 4 linjestykker der udgør ∂D .

Randen af $F_{\mathbf{r}}$ er så

$$\partial F_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{b}(\theta) = \mathbf{r}(\mathbf{d}(\theta)) = \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in I \subset \mathbb{R}.$$

Jacobi-funktionerne for $\mathbf{r}$ og $\mathbf{b}$ er henholdsvis:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|, \quad \text{og} \quad (29-17)$$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) = \|\mathbf{b}'_{\theta}\|. \quad (29-18)$$

Regulariteten af $\mathbf{r}$ giver

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle} \quad (u, v) \in D.$$

Enheds-normalvektorfeltet langs $F_{\mathbf{r}}$ er tilsvarende $\mathbf{n}_F = \mathbf{n}(u, v)$:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|} \quad \text{for alle} \quad (u, v) \in D. \quad (29-19)$$

29.2.2 Tubulære skaller og en afstandsfunktion

Vi definerer den tubulære skal med tykkelse t ud fra $F_{\mathbf{r}}$ som følgende område i $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega_t : \quad \mathbf{R}(u, v, w) = \mathbf{r}(u, v) + w \mathbf{n}(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad w \in [0, t]. \quad (29-20)$$

Specielt er *fladen* $F_{\mathbf{r}}$ netop basis-fladen for skallen og fås ved at bruge afbildningen $\mathbf{R}$ på D (hvor $w = 0$):

$$F_0 = F_{\mathbf{R}}(0) = F_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{R}(u, v, 0), \quad (u, v) \in D \quad . \quad (29-21)$$

Tilsvarende får vi, for $w = t$, top-fladen af skallen. Den er parametriseret således:

$$F_t = F_{\mathbf{R}}(t) = F_{\hat{\mathbf{r}}} \quad : \quad \hat{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{R}(u, v, t), \quad (u, v) \in D \quad . \quad (29-22)$$

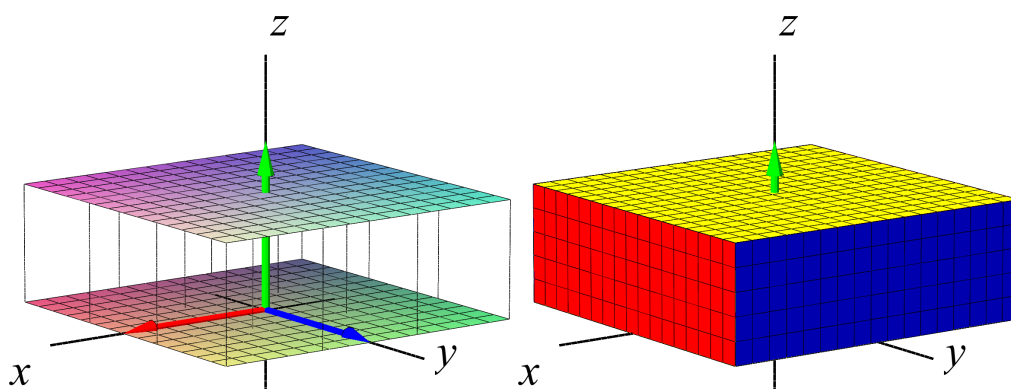


Figure 29.3: En tubulær skal der er defineret ved flow langs *enheds-normalvektorfeltet* $\mathbf{n}_F$ fra et kvadrat.

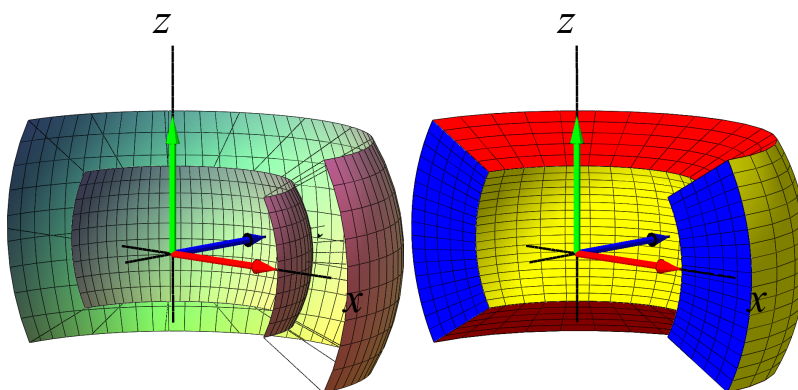


Figure 29.4: En tubulær skal der er defineret ved flow langs *enheds-normalvektorfeltet* $\mathbf{n}_F$ fra et fladestykke af en kugleflade.

Jacobi-funktionen for $\mathbf{R}$ er

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) &= |(\mathbf{R}'_u \times \mathbf{R}'_v) \cdot \mathbf{R}'_w| \\ &= |((\mathbf{r}'_u + w \mathbf{n}'_u) \times (\mathbf{r}'_v + w \mathbf{n}'_v)) \cdot \mathbf{n}_F| \quad . \end{aligned} \quad (29-23)$$

Da $\mathbf{n}_F$ er et enhedsvektorfelt som er parallelt med $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ langs F_r , får vi specielt (for $w = 0$):

$$\begin{aligned}\text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) &= |(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \cdot \mathbf{n}_F| \\ &= \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \\ &= \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad .\end{aligned}\tag{29-24}$$

Afbildningen $\mathbf{R}$ er regulær og bijektiv på $D \times [0, t]$ - hvis blot t er tilstrækkelig lille. Det følger dels af $\text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) > 0$ og dels af kontinuiteten af $\text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w)$.

Værdien af w betragtet som en funktion på $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ er en differentiabel funktion af de tre rum-variable (x, y, z) . Selv om dette kan forekomme at være helt tydeligt, rent intuitivt, så er det faktisk et resultat, der finder sin bedste formulering og begrundelse i den såkaldte *invers funktions-sætning*, som dyrkes i kurset [Matematik 3](#):

|||| Sætning 29.9 Invers funktionssætning

Lad Q betegne en åben mængde i $\mathbb{R}^3$ og lad $\mathbf{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegne en differentiabel bijektiv afbildning med $\text{Jacobi}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \in Q$.

Så er den omvendte afbildning $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(Q) \rightarrow Q$ også differentiabel med $\text{Jacobi}_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) > 0$ for alle $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(Q)$.

Intuitionen er altså i dette tilfælde præcis og korrekt. Når t er tilstrækkelig lille, så er w en differentiabel funktion af de tre rum-variable, (x, y, z) ; lad os kalde den funktion $h(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega_t$. Den funktion har så en egentlig gradient $\nabla(h)(x, y, z)$, som er vinkelret på niveauflanderne for h . Specielt er $\nabla(h)$ vinkelret på top-fladen $F_t = F_{\mathbf{R}}(t)$ af skallen Ω_t , hvor $h = t$ og den er tilsvarende vinkelret på basis-fladen $F_0 = F_{\mathbf{R}}(0) = F_r$, hvor $h = 0$.

Gradienten $\nabla(h)$ er faktisk præcis lig med $\mathbf{n}_F$ på basis-fladen. For at indse dette behøver vi kun at vise, at længden af gradienten der er 1. Retningen er jo den samme. Lad derfor (u_0, v_0) betegne et punkt i D og betragt restriktionen af h til den rette linje $\mathbf{r}(u_0, v_0) + w\mathbf{n}(u_0, v_0)$, hvor $w \in [0, t]$. Lad os benytte notationen $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ og $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(u_0, v_0)$.

Så giver kædereglen

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{d}{dw} h(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0) \right| \\ &= \left| \mathbf{n}_0 \cdot \nabla(h)(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0) \right| \\ &= \left\| \nabla(h)(\mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_0) \right\| , \end{aligned} \quad (29-25)$$

således at vi på fladen $F_{\mathbf{r}}$, hvor $w = 0$, har $\left\| \nabla(h)(\mathbf{r}_0) \right\| = 1$. Det var det, vi skulle vise. Vi har derfor:

$$\nabla(h)|_F = \mathbf{n}_F . \quad (29-26)$$



Funktionen $h(x, y, z)$ er den *Euklidiske afstand* fra punktet (x, y, z) til fladen $F_{\mathbf{r}}$. Lokalt, dvs. tilstrækkeligt tæt på (og i normalretningen af) fladen $F_{\mathbf{r}}$ er $\nabla h(x, y, z)$ en *udvidelse* af enhedsnormalvektorfeltet $\mathbf{n}_F$ til fladen. Vektorfeltet $\nabla h(x, y, z)$ er selv et enhedsvektorfelt. Ved at lade $F_{\mathbf{r}}$ flyde tiden t langs flowkurverne for $\nabla h(x, y, z)$ dannes (udfejes) det rumlige område, den massive skal, Ω_t , se figurerne 29.3, 29.4.

29.2.3 Integration i skallen

For en funktion $f(x, y, z)$ som er defineret i Ω_t fås integralet af f over området således:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} f d\mu \\ &= \int_0^t \left(\int_D f(\mathbf{R}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) du dv \right) dw . \end{aligned} \quad (29-27)$$

Den t -afledede af dette integral er, for $t = 0$, simpelthen fladeintegralet af f over $F_{\mathbf{r}}$:

|||| Hjælpesætning 29.10 Fladeintegral som t -afledet af rumintegral

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \int_{\Omega_t} f d\mu = \int_{F_{\mathbf{r}}} f d\mu . \quad (29-28)$$

||| Bevis

Det følger direkte af fundamentalsætningen 29.1:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{t=0} \int_{\Omega_t} f \, d\mu \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{t=0} \int_0^t \left(\int_D f(\mathbf{R}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, w) \, du \, dv \right) dw \\
 &= \int_D f(\mathbf{R}(u, v, 0)) \text{Jacobi}_{\mathbf{R}}(u, v, 0) \, du \, dv \\
 &= \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \\
 &= \int_{F_{\mathbf{r}}} f \, d\mu \quad .
 \end{aligned} \tag{29-29}$$

■

29.2.4 The Wall - Væggen

Skallen Ω_t har en rand $\partial\Omega_t$ som består af top-fladen F_t , basis-fladen $F_0 = F_{\mathbf{r}} = F_{\mathbf{R}}(0)$ og en 'væg' W_t med højden t . Se figurerne 29.3 og 29.4. Væg-komponenten fås ved restriktion af afbildningen $\mathbf{R}$ til $\partial D \times [0, t]$ således:

$$\begin{aligned}
 W_t : \quad \mathbf{B}(\theta, w) &= \mathbf{R}(u(\theta), v(\theta), w) \\
 &= \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) + w \mathbf{n}(u(\theta), v(\theta)) \\
 &= \mathbf{b}(\theta) + w \mathbf{n}(\mathbf{d}(\theta)) \quad , \quad \theta \in I \quad , \quad w \in [0, t] \quad .
 \end{aligned} \tag{29-30}$$

Jacobi-funktionen for denne afbildning er derfor

$$\begin{aligned}
 \text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) &= \|\mathbf{B}'_{\theta} \times \mathbf{B}'_w\| \\
 &= \|(\mathbf{b}'_{\theta} + w(\mathbf{n} \circ \mathbf{d})'_{\theta}) \times \mathbf{n}_F\| \quad .
 \end{aligned} \tag{29-31}$$

Da $\mathbf{n}_F$ står vinkelret på fladen $F_{\mathbf{r}}$ og derfor også på randen $\partial F_{\mathbf{r}}$ (parametriseret via $\mathbf{b}$), får vi:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, 0) = \|\mathbf{b}'_{\theta} \times \mathbf{n}_F\| = \|\mathbf{b}'_{\theta}\| = \text{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) \quad . \tag{29-32}$$

29.2.5 Integration langs væggen

For en given funktion $g(x, y, z)$ defineret på W_t fås integralet af g over den flade:

$$\int_{W_t} g \, d\mu = \int_0^t \left(\int_I g(\mathbf{B}(\theta, w)) \operatorname{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) \, d\theta \right) dw \quad . \quad (29-33)$$

Den t -afledede af dette integral er, for $t = 0$, kurve-integralet af g over ∂F :

|||| **Hjælpesætning 29.11** **Kurveintegral som t -afledet af fladeintegral**

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} g \, d\mu = \int_{\partial F} g \, d\mu \quad . \quad (29-34)$$

|||| **Bevis**

Det følger igen af fundamentalsætningen, Sætning 29.1:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} g \, d\mu \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_0^t \left(\int_I g(\mathbf{B}(\theta, w)) \operatorname{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, w) \, d\theta \right) dw \\ &= \int_I g(\mathbf{B}(\theta, 0)) \operatorname{Jacobi}_{\mathbf{B}}(\theta, 0) \, d\theta \\ &= \int_I g(\mathbf{b}(\theta)) \operatorname{Jacobi}_{\mathbf{b}}(\theta) \, d\theta \\ &= \int_{\partial F} g \, d\mu \quad . \end{aligned} \quad (29-35)$$

■

29.2.6 Bevis for Stokes' sætning

Vi er nu parate til at bevise Stokes' Sætning

||| **Bevis**

Funktionen $h(x, y, z)$ fra det foregående afsnit indsættes i stedet for $\psi(x, y, z)$ i Sætning 29.4, ligning (29-9). Med integrations-området $\Omega = \Omega_t$ får vi så:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_t} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu &= \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{n}_{\partial\Omega_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\
 &= \int_{F_t} (\mathbf{n}_{F_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\
 &\quad - \int_{F_0} (\mathbf{n}_{F_0} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\
 &\quad + \int_{W_t} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu .
 \end{aligned} \tag{29-36}$$

Men i ligning (29-36) har vi

$$\begin{aligned}
 \int_{F_t} (\mathbf{n}_{F_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu &= 0 \quad \text{og} \\
 \int_{F_0} (\mathbf{n}_{F_0} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu &= 0 ,
 \end{aligned} \tag{29-37}$$

idet $\nabla(h)$ er vinkelret på begge fladerne F_t og F_0 således at $\nabla(h)$ er proportional med henholdsvis $\mathbf{n}_{F_t}$ og $\mathbf{n}_{F_0}$ på de respektive flader.

Langs $\partial F \subset W_t$ har vi $\mathbf{n}_{W_t} = \mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ og derfor $\mathbf{e}_{\partial F} = \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_{W_t}$ - i overensstemmelse med orienteringsreglen i Sætning 29.2. Hvis vi t -afleder begge sider af den reducerede ligning (29-36) får vi:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{\Omega_t} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=0} \int_{W_t} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla(h) d\mu ,
 \end{aligned} \tag{29-38}$$

således at vi endelig har - i kraft af ligningerne (29-28) og (29-34):

$$\begin{aligned}
 &\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\
 &= \int_{\partial F} (\mathbf{n}_{W_t} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\
 &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_{W_t}) d\mu \\
 &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu .
 \end{aligned} \tag{29-39}$$

Stokes' sætning er dermed bevist.

■

29.3 Verificering af Stokes' sætning i konkrete eksempler

I lighed med Gauss' divergens-sætning kan Stokes' sætning verificeres ved i konkrete givne tilfælde at beregne *begge sider* af identiteten (29.1.3) i Stokes' sætning.

|||| Eksempel 29.12 Stokes' sætning med en cirkelskive

En standard cirkelskive i (x, y) -planen er givet ved sin sædvanlige parameterfremstilling:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0) \quad , \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad (29-40)$$

med Jacobifunktionen

$$\text{Jacobi}_r(u, v) = u \quad , \quad (29-41)$$

standard enhedsnormalvektorfelt til fladen

$$\mathbf{n}_F = (0, 0, 1) \quad , \quad (29-42)$$

og standard enheds-tangentvektorfelt langs den *cirkulære* rand ∂F :

$$\mathbf{e}_{\partial F} = \mathbf{r}'_v(1, v) = (-\sin(v), \cos(v), 0) \quad . \quad (29-43)$$



Bemærk, at det er $\mathbf{r}(1, v)$, $v \in [-\pi, \pi]$, der giver *hele randen*, at $\mathbf{r}'_v(1, v)$ er en enhedsvektor for alle v , og at $\mathbf{r}'_v(1, v) \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra cirkelskiven langs hele randkurven.

Et glat vektorfelt i rummet er givet ved sine koordinatfunktioner således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2) \quad , \quad (29-44)$$

og har det tilhørende rotationsvektorfelt

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x) \quad . \quad (29-45)$$

Vi vil verificere Stokes' sætning ved at beregne "begge sider" af ligning (29.1.3) i dette konkrete tilfælde.

Den totale flux af vektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem F_r i retning af standard-enhedsnormalen $\mathbf{n}_F = (0, 0, 1)$ er

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) &= \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_{F_r} (1 - x) d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 - u \cdot \cos(v)) \cdot u du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \cos(v) \right) dv \\ &= \pi \quad . \end{aligned} \quad (29-46)$$

Cirkulationen af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs ∂F i retning af standard-enhedstangentvektorfeltet $\mathbf{e}_{\partial F} = (-\sin(v), \cos(v), 0)$ er

$$\begin{aligned}
 \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{V}(\mathbf{r}(1, v)) \cdot (-\sin(v), \cos(v), 0) dv \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(v) \cdot \sin(v), \cos(v), *) \cdot (-\sin(v), \cos(v), 0) dv \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(v) \cdot \sin^2(v) + \cos^2(v)) dv \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(v) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(v) + \sin^2(v)) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dv \\
 &= \pi .
 \end{aligned} \tag{29-47}$$

Begge sider i ligningen (29-3) giver altså π i dette eksempel – og vi har derfor verificeret Stokes' sætning.

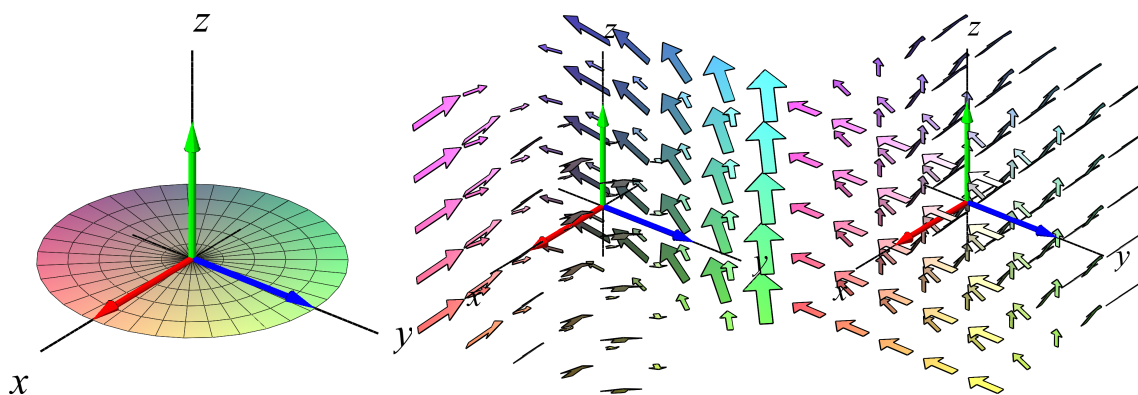


Figure 29.5: En cirkelskive i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x)$.

Eksempel 29.13 Stokes' sætning med en paraboloid

Et udsnit af en paraboloid er givet ved en parameterfremstilling således:

$$F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (2 \cdot u \cdot \cos(v), 2 \cdot u \cdot \sin(v), u^2) , \tag{29-48}$$

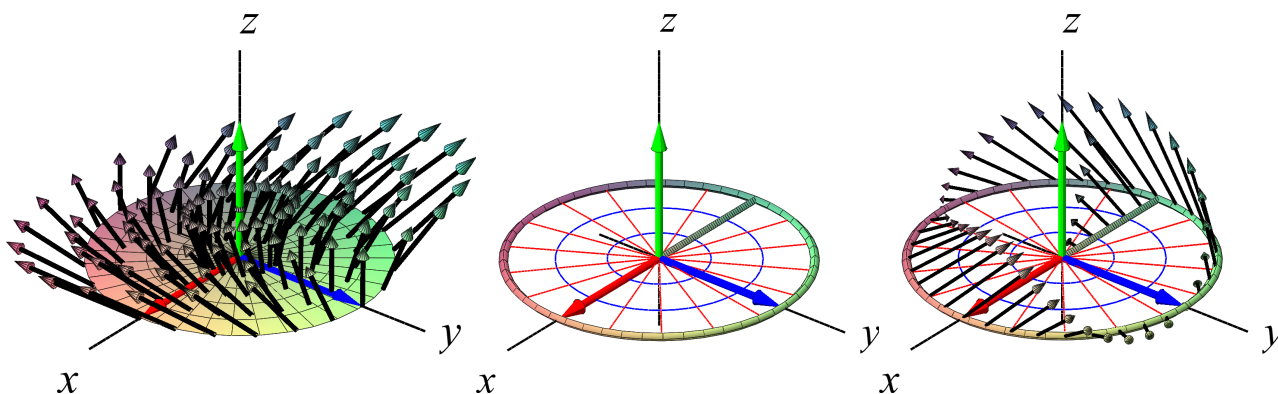


Figure 29.6: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, -2 \cdot x, 1 - x)$ til en cirkelskive, cirkelskivens rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x \cdot y, x, x^2)$ restringeret til randen.

hvor

$$(u, v) \in [1/2, 1] \times [0, \pi] \quad (29-49)$$

Parameterfremstillingen har Jacobifunktionen

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = 4 \cdot u \cot \sqrt{1 + u^2} \quad , \quad (29-50)$$

og standard-normalvektorfeltet (ikke nødvendigvis enheds-vektorer) til fladen er givet ved

$$\mathbf{N}_F(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = (-4 \cdot u^2 \cdot \cos(v), -4 \cdot u^2 \cdot \sin(v), 4 \cdot u) \quad . \quad (29-51)$$

Et glat vektorfelt i rummet er givet ved sine koordinatfunktioner således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x) \quad , \quad (29-52)$$

med det tilhørende rotationsvektorfelt

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0) \quad . \quad (29-53)$$

Vi vil verificere Stokes' sætning ved at beregne "begge sider" af ligning (29-3) i dette konkrete tilfælde.

Den totale flux af vektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem $F_{\mathbf{r}}$ i retning af standard-enhedsnormalen er, idet vi benytter normalvektorfeltet $\mathbf{N}_F(u, v)$ direkte:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_{\mathbf{r}}) &= \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_0^\pi \int_{1/2}^1 \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) du dv \\ &= \int_0^\pi \int_{1/2}^1 (-8 \cdot u^2 \cdot \sin(v)) du dv \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{-7}{3} \cdot \sin(v) \right) dv \\ &= \frac{-14}{3} \quad . \end{aligned} \quad (29-54)$$

Cirkulationen af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs ∂F i retning af den korrekt orienterede randkurve består af fire komponenter. De fås fra fladens parameterfremstilling $\mathbf{r}(u, v)$ dels ved at fastholde v til at være henholdsvis 0 og π , og dels ved at fastholde u til at være henholdsvis $1/2$ og 1 , idet det i hvert tilfælde samtidigt sikres, at den frie parameter løber den 'rigtige vej', dvs. således at alle fire randkomponenter får den rette orientering i forhold til fladens normalvektorfelt:

$$\begin{aligned}\partial_1 F &: \quad \mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(u, 0) = (2 \cdot u, 0, u^2) \quad , \quad u \in [1/2, 1] \\ &\quad \mathbf{r}'_1(u) = (2, 0, 2 \cdot u) \\ &\quad \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(u)) = (u^2, 0, -2 \cdot u) \\ &\quad \mathbf{r}'_1(u) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(u)) = -2 \cdot u^2 \quad ,\end{aligned}\tag{29-55}$$

$$\begin{aligned}\partial_3 F &: \quad \mathbf{r}_3(u) = \mathbf{r}(1 - u + 1/2, v) = (-3 + 2 \cdot u, 0, (-3/2 + u)^2) \quad , \quad u \in [1/2, 1] \\ &\quad \mathbf{r}'_3(u) = (2, 0, 2 \cdot u - 3) \\ &\quad \mathbf{V}(\mathbf{r}_3(u)) = ((-3/2 + u)^2, 0, 3 - 2 \cdot u) \\ &\quad \mathbf{r}'_3(u) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_3(u)) = \frac{-9}{2} + 6 \cdot u - 2 \cdot u^2 \quad ,\end{aligned}\tag{29-56}$$

$$\begin{aligned}\partial_2 F &: \quad \mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}(1, v) = (2 \cdot \cos(v), 2 \cdot \sin(v), 1) \quad , \quad v \in [0, \pi] \\ &\quad \mathbf{r}'_2(v) = (-2 \cdot \sin(v), 2 \cdot \cos(v), 0) \\ &\quad \mathbf{V}(\mathbf{r}_2(v)) = (1, 2 \cdot \sin(v), -2 \cdot \cos(v)) \\ &\quad \mathbf{r}'_2(v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_2(v)) = 2 \cdot \sin(v) \cdot (2 \cdot \cos(v) - 1) \quad ,\end{aligned}\tag{29-57}$$

$$\begin{aligned}\partial_4 F &: \quad \mathbf{r}_4(v) = \mathbf{r}(1/2, \pi - v) = (-\cos(v), \sin(v), 1/4) \quad , \quad v \in [0, \pi] \\ &\quad \mathbf{r}'_4(v) = (\sin(v), \cos(v), 0) \\ &\quad \mathbf{V}(\mathbf{r}_4(v)) = \left(\frac{1}{4}, \sin(v), \cos(v)\right) \\ &\quad \mathbf{r}'_4(v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_4(v)) = \frac{1}{4} \cdot \sin(v) \cdot (\cos(v) + 1) \quad .\end{aligned}\tag{29-58}$$

Vi har dermed følgende totale cirkulation af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs randen:

$$\begin{aligned}\text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) &= \sum_{i=1}^4 \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial_i F) \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\partial_i F} \mathbf{V}(\mathbf{r}_i(t)) \cdot \mathbf{r}'_i(t) \, dt \\ &= \int_{1/2}^1 (-2 \cdot u^2) \, du \\ &\quad + \int_{1/2}^1 \left(\frac{-9}{2} + 6 \cdot u - 2 \cdot u^2 \right) \, du \\ &\quad + \int_0^\pi 2 \cdot \sin(v) \cdot (2 \cdot \cos(v) - 1) \, dv \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \sin(v) \cdot (\cos(v) + 1) \, dv \\ &= -\frac{7}{12} - \frac{7}{12} - 4 + \frac{1}{2} = -\frac{14}{3} \quad .\end{aligned}\tag{29-59}$$

Begge sider i ligningen (29-3) giver altså $-14/3$ i dette eksempel, og vi har således igen verificeret Stokes' sætning.

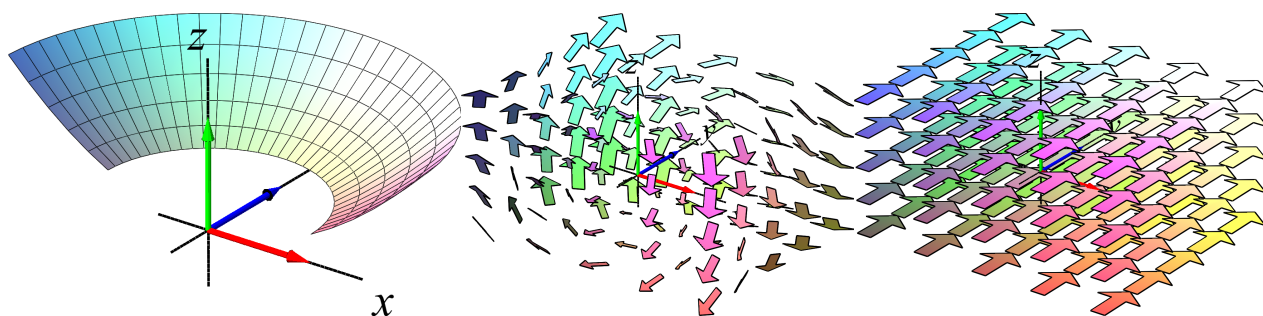


Figure 29.7: Et stykke af en paraboloid i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0)$.

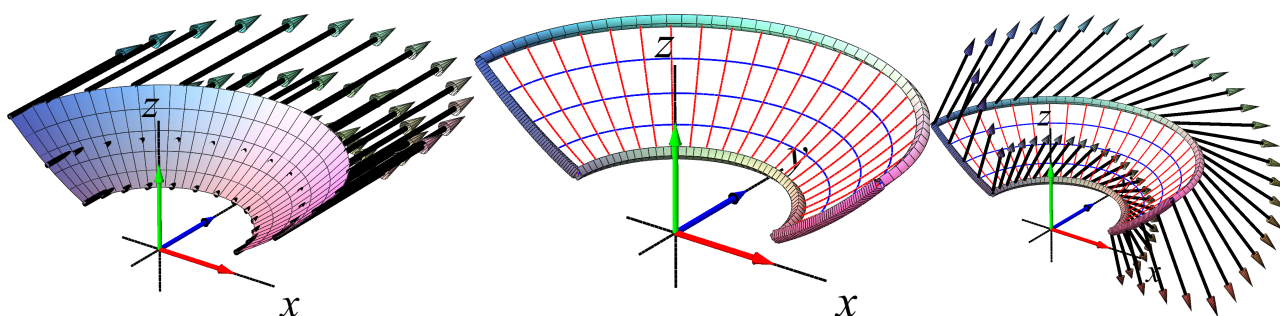


Figure 29.8: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 2, 0)$ til et stykke af en paraboloid, fladestykkets rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, y, -x)$ restringeret til randen.

|||| Opgave 29.14

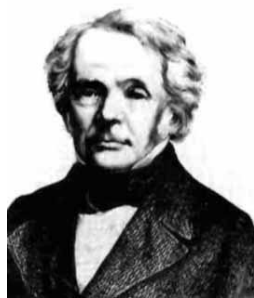
Lad F_r betegne den flade, der har følgende parameterfremstilling og parameter-område:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = ((1 + u^2) \cos(v), (1 + u^2) \sin(v), \sin(u)) \quad , \quad (29-60)$$

hvor

$$(u, v) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \quad . \quad (29-61)$$

Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (yx, yz, xz)$ over fladen F_r med den givne rand ∂F_r .

Figure 29.9: August Ferdinand Möbius, se [Biografi](#).

|||| Opgave 29.15

Lad F_r betegne den flade – et såkaldt Möbius-bånd – der har følgende parameterfremstilling og parameter-område:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = (2 \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), 2 \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), v \sin(u/2)) \quad , \quad (29-62)$$

hvor $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$. Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (-y, x, 1)$ over fladen F_r med den givne rand ∂F_r , se Figur 29.10: Vis eksplicit, at der gælder:

$$\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu = -32 \quad . \quad (29-63)$$

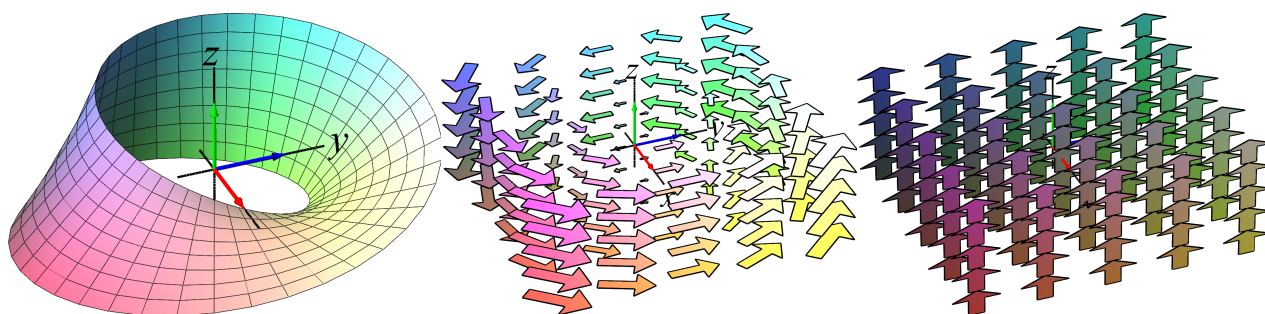


Figure 29.10: Et Möbius bånd i et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ (i midten) og vektorfeltets rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 0, 2)$.

||| Opgave 29.16

Lad nu G_r betegne det samme Möbius-bånd som i opgave 29.15:

$$\begin{aligned} G_r : \mathbf{r}(u, v) \\ = (2 \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), 2 \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), v \sin(u/2)) \end{aligned} \quad (29-64)$$

men nu med et lidt modificeret parameterområde:

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1] \quad (29-65)$$

Verificér at Stokes' sætning er opfyldt for vektorfeltet $\mathbf{V} = (-y, x, 1)$ over fladen G_r med den givne rand ∂G_r : Vis eksplicit, at der gælder:

$$\int_{G_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_G \, d\mu = \int_{\partial G_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial G} \, d\mu = 0 \quad (29-66)$$

||| Opgave 29.17

Forklar forskellen mellem de to (værdi-)resultater (henholdsvis -32 og 0), der opnås i henholdsvis (29-63) og (29-66). Vink: Hold je med normalvektorfeltet $\mathbf{n}_F$.

Hvilke værdier for rotationsflux og cirkulation opnås ved at skifte intervaller i parametriseringen, dvs. ved blot at benytte følgende parameterintervaller for forskellige $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(u, v) \in [-\pi + \alpha, \pi + \alpha] \times [-1, 1] \quad ? \quad (29-67)$$

29.4 Stokes' sætning i planen

Plane områder, for eksempel områder i (x, y) -planen, kan parametriseres således:

$$F_r : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0) \in \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \quad (29-68)$$

Et plant område har et særligt simpelt enhedsnormal-vektorfelt i rummet, dvs. når vi betragter det plane område som en flade i rummet, der tilfældigvis ligger helt i

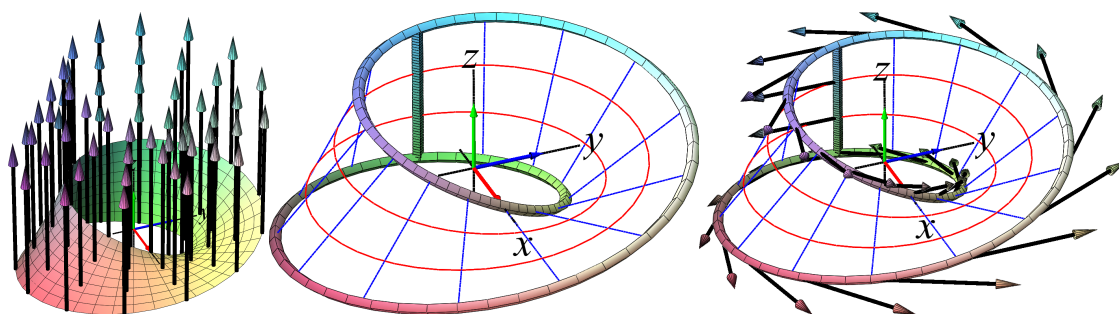


Figure 29.11: Restriktionen af rotationsvektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z) = (0, 0, 2)$ til et stykke af et Möbius bånd, båndets rand, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ restringeret til randen.

(x, y) -planen: $\mathbf{n}_F = (0, 0, 1)$.

Med hensyn til randen af det plane område repeterer vi notationen fra afsnit 29.2.1: Randen ∂F_r af F_r fremkommer ved at bruge vektorfunktionen $\mathbf{r}$ på de 4 rette linjestykker, der udgør randen ∂D af det rektangulære parameterområde $D = [a, b] \times [c, d]$. Vi parametriserer hele ∂D på én gang ved hjælp af en parameter θ og en vektor-funktion $\mathbf{d}$:

$$\partial D : \quad \mathbf{d}(\theta) = (u(\theta), v(\theta)) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2, \quad \theta \in I \subset \mathbb{R},$$

hvor $u(\theta)$ og $v(\theta)$ kun er stykkevis differentiable funktioner af θ . De kan f.eks. vælges som lineære funktioner af θ for hvert enkelt af de 4 linjestykker der udgør ∂D .

Randen af F_r er så

$$\partial F_r : \quad \mathbf{b}(\theta) = \mathbf{r}(\mathbf{d}(\theta)) = \mathbf{r}(u(\theta), v(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \theta \in I = [0, T] \subset \mathbb{R}. \quad (29-69)$$

Lad nu $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ betegne et vilkårligt vektorfelt i rummet, så har vi følgende konsekvens af Stokes' sætning:

||| Sætning 29.18 Stokes' sætning i planen

Med ovenstående notation gælder:

$$\begin{aligned}
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu \\
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu &= \int_{\partial F} (V_1, V_2, V_3) \cdot \mathbf{e}_{\partial F} \, d\mu \\
 \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu &= \int_I (V_1, V_2, V_3) \cdot \mathbf{b}'(\theta) \, d\theta \\
 \int_{F_r} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \, d\mu &= \int_0^T (V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta)) \, d\theta \quad ,
 \end{aligned} \tag{29-70}$$

og dermed

$$\int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv = \int_0^T (V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta)) \, d\theta \quad . \tag{29-71}$$

||| Bemærkning 29.19

Det ses, at vektorfeltets tredje koordinat-funktion $V_3(x, y, z)$ ikke spiller nogen rolle i sætningen. Sætningen er derfor et resultat om vektorfunktioner i *planen*: $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. Vi illustrerer med et detaljeret - men simpelt - eksempel nedenfor.

||| Eksempel 29.20 Stokes' sætning i planen

Lad $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$ og $\mathbf{r}(u, v) = (3u, 4v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, så får vi: $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = 12$ og $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 2$ sådan at venstre side i ligning (29.4.71) giver:

$$\begin{aligned}
 &\int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \\
 &= \int_c^d \int_a^b 2 \cdot 12 \, du \, dv \\
 &= 24(b-a)(d-c) \quad .
 \end{aligned} \tag{29-72}$$

Højre side i ligning (29.4.71) skal give samme værdi.

Vi bestemmer højre sides værdi ved at opdele randen af F_r i 4 retlinede komponenter og ved at beregne det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs hver komponent, idet vi i hvert tilfælde sørger for at orientere (parametrisere) komponenten korrekt efter den forskrift, som er præciseret i Stokes' sætning.

Vi begynder med at sætte $T = 2(b - a) + 2(d - c)$, dvs. T er den totale omkreds af parameterområdet D . Randen af D kan vi så parametrisere på følgende måde:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\theta) &= (a + \theta, 0) & \text{for } \theta \in [0, b - a] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (b, c + \theta) & \text{for } \theta \in [b - a, b - a + d - c] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (b - \theta, d) & \text{for } \theta \in [b - a + d - c, 2(b - a) + d - c] \\ \mathbf{d}(\theta) &= (a, d - \theta) & \text{for } \theta \in [2(b - a) + d - c, 2(b - a) + 2(d - c)] \end{aligned} \quad (29-73)$$

Randen af F_r har vi dernæst på følgende form:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\theta) &= (3(a + \theta), 0) & \text{for } \theta \in [0, b - a] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3b, 4(c + \theta)) & \text{for } \theta \in [b - a, b - a + d - c] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3(b - \theta), 4d) & \text{for } \theta \in [b - a + d - c, 2(b - a) + d - c] \\ \mathbf{b}(\theta) &= (3a, 4(d - \theta)) & \text{for } \theta \in [2(b - a) + d - c, 2(b - a) + 2(d - c)] \end{aligned} \quad (29-74)$$

og dermed:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(\theta) &= (3, 0) & \text{for } \theta \in [0, b - a] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (0, 4) & \text{for } \theta \in [b - a, b - a + d - c] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (-3, 0) & \text{for } \theta \in [b - a + d - c, 2(b - a) + d - c] \\ \mathbf{b}'(\theta) &= (0, -4) & \text{for } \theta \in [2(b - a) + d - c, 2(b - a) + 2(d - c)] \end{aligned} \quad (29-75)$$

Vi kan nu beregne højresiden i ligning (29.4.71) som summen af de 4 led, der stammer fra hver sin komponent af randkurven. For eksempel, for det frste linjestykke i randkurven, som er parallel med x -aksen og med konstant $y = 4c$ har vi: $\theta \in [0, b - a]$ har vi $b'_1(\theta) = 3$, $b'_2(\theta) = 0$, $V_1(x, y) = y = b_2(u, v) = 4v = 4c$ og ligeledes for de andre 3 bidrag (se figurerne 29.12 og 29.13):

$$\begin{aligned} \int_0^T V_1 b'_1(\theta) + V_2 b'_2(\theta) d\theta &= \\ &= \int_0^{b-a} 12c d\theta \\ &+ \int_{b-a}^{b-a+d-c} 12b d\theta \\ &+ \int_{b-a+d-c}^{2(b-a)+d-c} 12d d\theta \\ &+ \int_{2(b-a)+d-c}^{2(b-a)+2(d-c)} 12a d\theta \\ &= \\ &= 12c(b - a) \\ &+ 12b(d - c) \\ &+ 12d(b - a) \\ &+ 12a(d - c) \\ &= \\ &= 24(b - a)(d - c) \end{aligned} \quad (29-76)$$

i overensstemmelse med resultatet i ligning (29-72), sådan at den generelle ligning (29-71) dermed er verificeret i dette tilfælde.

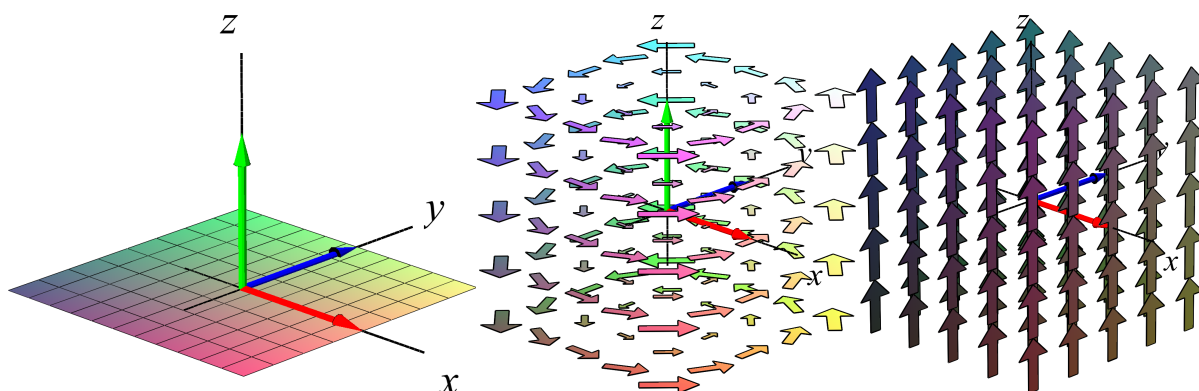


Figure 29.12: 3D versionering af eksempel 29.20. Vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x, 0)$ har rotationsvektorfeltet $(0, 0, 2)$. Her er valgt et kvadrat med parameterfremstilling $\mathbf{r}(u, v) = (3u, 4v, 0)$, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, $a = -1/3$, $b = 1/3$, $c = -1/4$, og $d = 1/4$.

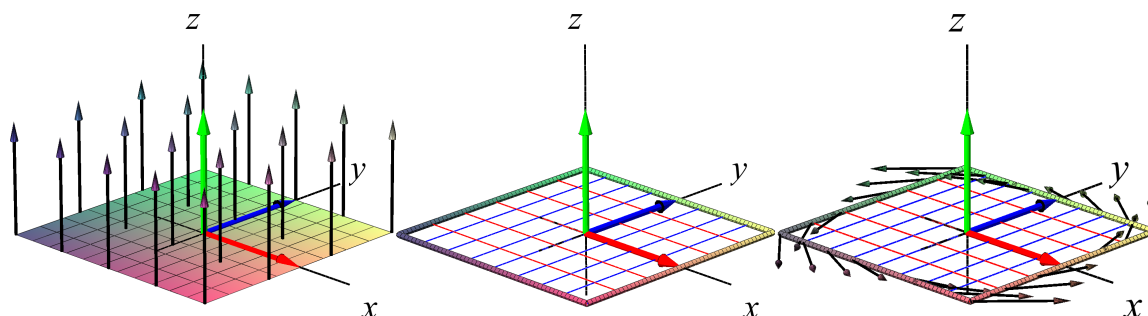


Figure 29.13: Opstilling af fluxen af rotationsvektorfeltet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}(x, y, z)) = (0, 0, 2)$ igennem kvadrat i (x, y) -planen og tilhørende cirkulation af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ langs den firkantede randkurve.

29.5 Opsummering

Vi har set her, at fluxen af et rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x, y, z)$ igennem en flade kan beregnes som cirkulationen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs randkurven til fladen – passende orienteret.

- Lad F_r betegne en glat parametriseret flade med randkurven ∂F_r og enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_F$ og lad $\mathbf{V}$ være et glat vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. Så udtrykker Stokes' sætning følgende identitet

$$\int_F \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu = \int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F} d\mu \quad . \quad (29-77)$$

Ved beregning af højresiden er det vigtigt (for at få det korrekte fortegn) at orienteringen af randen vælges sådan at krydsproduktet $\mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra fladen langs med randen.

- Alternativt kan Stokes' sætning udtrykkes således: Fluxen af *rotationen af* vektorfeltet $\mathbf{V}$ igennem fladen F_r er lig med *cirkulationen* af vektorfeltet langs fladestykkets lukkede randkurve ∂F :

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{V}), F_r) = \text{Cirk}(\mathbf{V}, \partial F) \quad . \quad (29-78)$$

- Den Totale rotation af et vektorfelt i et rumligt område kan tilsvarende beregnes ved fladeintegral over den totale overflade af området: Lad Ω være et rumligt område med randen $\partial\Omega$ og udadrettet enheds-normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på $\partial\Omega$. Så gælder for ethvert glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\int_{\Omega} \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V} d\mu = \mathbf{Vrid}(\mathbf{V}, \partial\Omega) \quad . \quad (29-79)$$