

 eNote 26

Vektorfelter

I eNote 10 indføres og studeres vektorer i plan og rum. I eNote 20 ser vi på gradienterne for funktioner $f(x, y)$ af to variable. Et gradientvektorfelt for en funktion af to variable er – som navnet rigeligt antyder – et eksempel på et plant vektorfelt. I denne eNote vil vi begynde at studere vektorfelter helt generelt. Både i planen og i rummet. Vi vil præcisere, hvad det betyder at flyde med et givet vektorfelt og beregne, hvor man kommer hen i rummet eller i planen på den måde i løbet af et givet tidsrum. For at finde disse såkaldte flow-kurver får vi brug for at kunne løse (her passende simple) første ordens differentiaalligningssystemer hvorved eNote 17 ligesom de ovenfor nævnte eNoter bliver aktuelt materiale for nærværende eNote. Vi vil også begynde på at undersøge, hvad der sker med større systemer af punkter eller partikler når de hver for sig flyder med vektorfeltet.

26.1 Vektorfelter

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ i rummet er givet ved 3 glatte funktioner $V_1(x, y, z)$, $V_2(x, y, z)$ og $V_3(x, y, z)$ som hver er funktioner af de tre variable x , y , og z således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z)) \quad \text{for} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad . \quad (26-1)$$

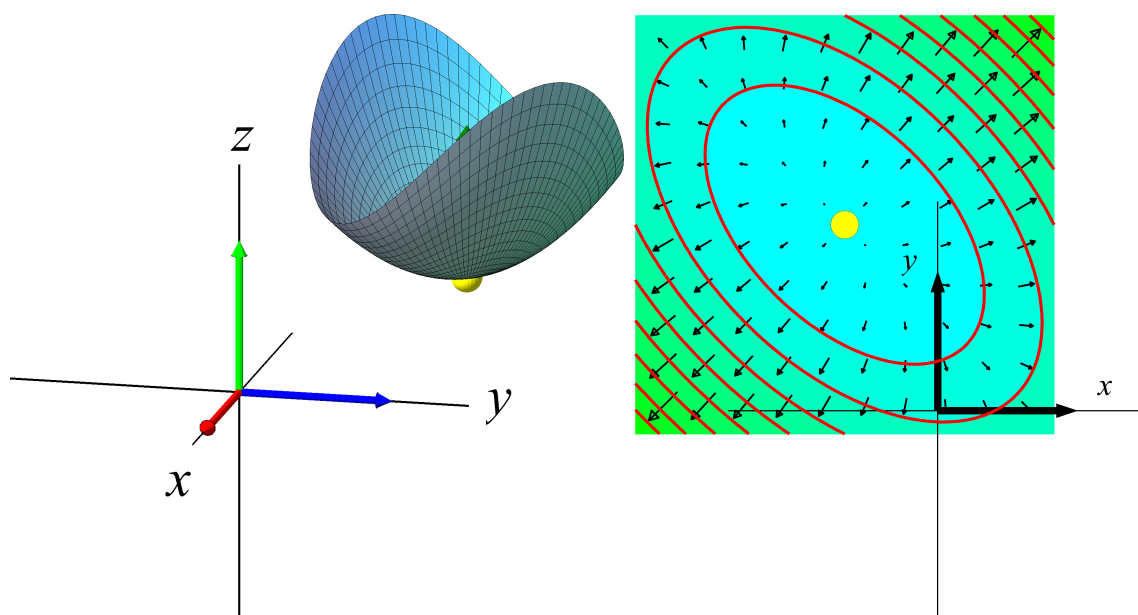


Figure 26.1: En grafflade for en funktion af to variable og det tilhørende gradientvektorfelt i planen sammen med nogle af niveaukurverne. Gradientvektorfeltet er overalt vinkelret på niveaukurverne, se eNote 20.



Et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ tegnes og angives sædvanligvis i rummet ved i et passende antal udvalgte punkter (x_i, y_i, z_i) at afsætte vektoren som en pil med fodpunkt i (x_i, y_i, z_i) og spidspunkt i $(x_i + V_1(x_i, y_i, z_i), y_i + V_2(x_i, y_i, z_i), z_i + V_3(x_i, y_i, z_i))$. Der kan være gode grunde til at angive vektorfeltet på andre måder. F.eks. hvis der er stor variation i længden af vektorerne i et givet område, så kan det være en fordel at benytte *tykkelsen* af pilene som en længde-indikerende parameter.

Et vektorfelt i planen er tilsvarende givet ved to koordinatfunktioner $V_1(x, y)$ og $V_2(x, y)$ som hver er glatte funktioner af de to variable x og y :

$$\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y)) \quad \text{for} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (26-2)$$

Gradientvektorfeltet for en glat funktion $f(x, y)$ af to variable (som indføres og studeres i eNote 20 er et eksempel på et vektorfelt i planen, se figuren.

Som for funktioner af tre variable defineres gradientvektorfeltet for funktioner $f(x, y, z)$ af tre variable:

|||| Definition 26.1 Gradientfelt i rummet

Lad $f(x, y, z)$ betegne en glat funktion af tre variable i $\mathbb{R}^3$. Så defineres gradientvektorfeltet for $f(x, y, z)$ på følgende måde ved hjælp af de tre første partielle afledede af $f(x, y, z)$:

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)) \quad , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad . \quad (26-3)$$

|||| Eksempel 26.2 Et gradientfelt i rummet

Vi lader $f(x, y, z)$ betegne andengradspolynomiet

$$f(x, y, z) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z - 2 \cdot x - 4 \cdot y - 2 \cdot z + 3 \quad . \quad (26-4)$$

Gradientvektorfeltet for $f(x, y, z)$ er så:

$$\nabla f(x, y, z) = (4 \cdot x - 2 \cdot z - 2, 4 \cdot y - 4, -2 \cdot x + 4 \cdot z - 2) \quad . \quad (26-5)$$

Se figur 26.2. Vi refererer til eksempel 22.11 i eNote 20 vedrørende konstruktionen af den viste ellipsoide-niveauflade $\mathcal{K}_0(f)$ for $f(x, y, z)$. Niveaufladen og det beregnede gradientvektorfelt er antydnet i figur 26.2. Gradientvektorfeltet ses at være vinkelret på niveaufladen.



Man kan nu meget vel spørge om *alle* glatte vektorfelter i planen og *alle* glatte vektorfelter i rummet *stammer fra* en funktion på den måde, at de hver for sig er gradientvektorfeltet for en eller anden funktion af henholdsvis to og tre variable. Men så simpelt er det ikke!

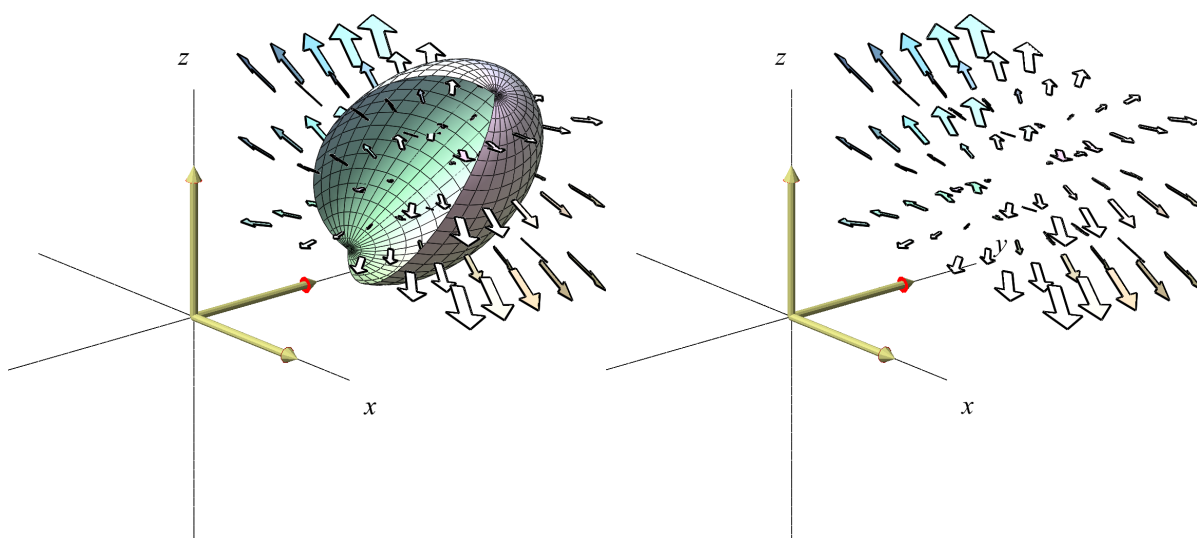


Figure 26.2: Niveauflade (i åbnet version) for en funktion (andengradspolynomium) af tre variable og nogle tilhørende gradientvektorer fra gradientvektorfeltet i rummet.

|||| Eksempel 26.3 Et vektorfelt som ikke er et gradientvektorfelt

Lad $\mathbf{V}(x, y)$ betegne det meget simple vektorfelt i planen $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$, hvor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Så findes der ikke nogen funktion $f(x, y)$ som opfylder at $\nabla f(x, y) = \mathbf{V}(x, y)$.

Hvis vi nemlig (indtil modstrid) antager, at der findes en sådan funktion med den egenskab:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \mathbf{V}(x, y) \quad , \quad \text{sådan at} \\ (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) &= (-y, x) \quad , \quad \text{så får vi at} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -y \\ f'_y(x, y) &= x \quad , \quad \text{og dermed} \end{aligned} \tag{26-6}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x, y) &= -1 \\ f''_{yx}(x, y) &= 1 \quad , \end{aligned}$$

og det stemmer jo ikke overens med at der for alle glatte funktioner gælder

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad , \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{26-7}$$

Det viser, at der ikke findes nogen funktion hvis gradientvektorfelt er det givne vektorfelt.



Gradientvektorfelterne er altså kun eksempler på vektorfelter – men en meget stor og meget vigtig samling af eksempler på vektorfelter.

Et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y)$ i planen kan let udvides til et vektorfelt $\mathbf{W}(x, y, z)$ i rummet ved simpelthen at parallelforskyde alle vektorerne fra planen i z -aksens retning og iøvrigt sætte $W_3(x, y, z) = 0$ for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

Det helt generelle plane vektorfelt $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ har således følgende rumlige udvidelse:



$$\mathbf{W}(x, y, z) = (V_1(x, y), V_2(x, y), 0) \quad \text{dvs.}$$

$$W_1(x, y, z) = V_1(x, y) \quad , \quad (26-8)$$

$$W_2(x, y, z) = V_2(x, y) \quad ,$$

$$W_3(x, y, z) = 0 \quad .$$

Se figur 26.3 som antyder de rumlige udvidelser af tre forskellige vektorfelter $\mathbf{V}(x, y) = (1, 0)$, $\mathbf{V}(x, y) = (x, y)$, og $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$, altså $\mathbf{W}(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{W}(x, y, z) = (x, y, 0)$, og $\mathbf{W}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ henholdsvis.

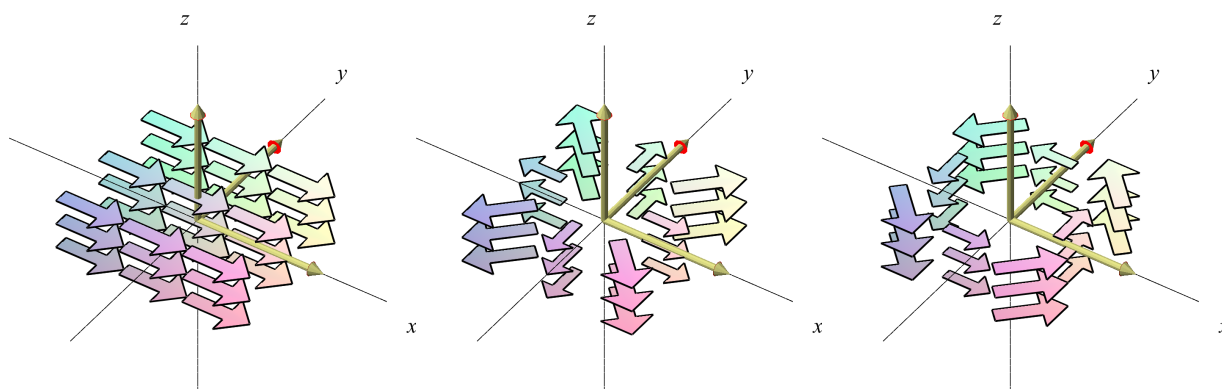


Figure 26.3: Tre plane vektorfelter er her udvidet til rumlige vektorfelter.

Nogle vektorfelter er særlig simple. Det gælder især de vektorfelter hvor alle 3 koordinatfunktioner er polynomier af højst første grad i de rumlige variable (x, y, z) , dvs.

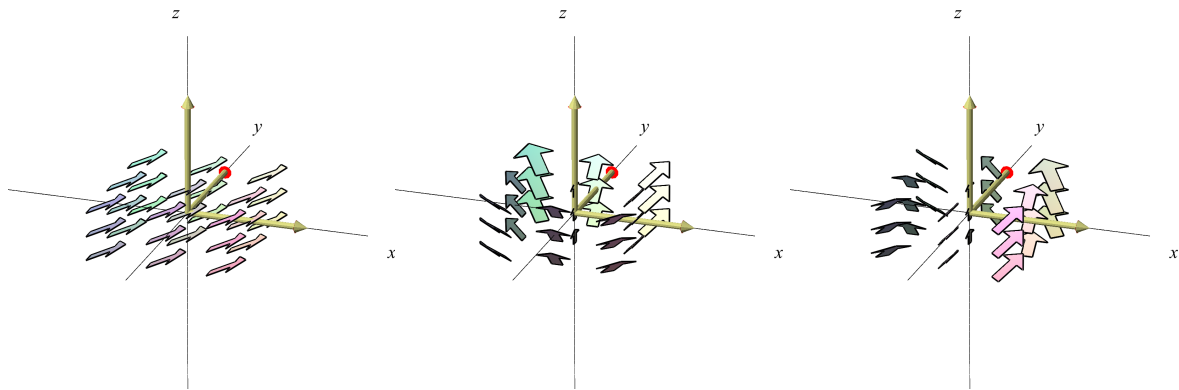


Figure 26.4: De tre rumlige vektorfelter fra figur 26.3 er her modificerede til at have $W_3 = 1/2$ i stedet for $W_3 = 0$.

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{pmatrix}. \quad (26-9)$$

I så fald kan vektorfeltet skrives kort ved hjælp af den matrix, $\mathbf{A}$, der har elementerne a_{ij} og den vektor, $\mathbf{b}$, der har koordinaterne b_i :

|||| Definition 26.4 Vektorfelt af første grad

Et *vektorfelt af første grad* er et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$, der kan skrives på følgende form ved hjælp af en konstant matrix $\mathbf{A}$ og en konstant vektor $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{V}^\top = (\mathbf{V}(x, y, z))^\top = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top + \mathbf{b}^\top, \quad (26-10)$$

hvor $^\top$ betyder transponering af de respektive matricer, sådan at

$$\begin{bmatrix} V_1(x, y, z) \\ V_2(x, y, z) \\ V_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (26-11)$$

|||| **Eksempel 26.5 Konstant vektorfelt**

Et konstant vektorfelt kan for eksempel modellere en konstant vind lokalt tæt ved (x, y) -planen (jordoverfladen):

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{b} \quad , \quad (26-12)$$

hvor $\mathbf{b}$ er en konstant vektor, f.eks. $\mathbf{b} = (0, 7, 0)$ – hvis vinden blæser med 7 km/t i y -aksens retning.

|||| **Eksempel 26.6 Roterende vektorfelt**

Et eksempel på et såkaldt *roterende vektorfelt* er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0) \quad . \quad (26-13)$$

Se figur 26.3 i midten.

|||| **Definition 26.7**

Sporet af en kvadratisk $n \times n$ -matrix A med elementerne a_{ij} er summen af matrixens n diagonalelementer:

$$\text{spor}(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \quad . \quad (26-14)$$

|||| **Opgave 26.8**

Find A og $\mathbf{b}$ (som i Definition 26.4) for vektorfeltet i eksempel 26.6. Hvad er sporet af A i dette tilfælde? Kan A diagonaliseres (diagonalisering beskrives i eNote 4)?

|||| **Eksempel 26.9 Eksplosions- og implosions-vektorfelter**

Et eksempel på hvad vi kunne kalde et *eksplosionsvektorfelt* er givet ved følgende koordinat-funktioner (se hvorfor i figur 26.6):

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z) \quad . \quad (26-15)$$

Tilsvarende er følgende et eksempel på et vektorfelt, som vi kan kalde et *implosionsvektorfelt* (se hvorfor i figur 26.7):

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -y, -z) \quad . \quad (26-16)$$

|||| Opgave 26.10

Find $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$ for vektorfelterne i ovenstående eksempel 26.9. Hvad er sporet af $\mathbf{A}$ for de to vektorfelter? Kan $\mathbf{A}$ diagonaliseres?

Vi vil nu begrunde de (dynamiske) navne, som vi har givet vektorfelterne i ovenstående eksempler 26.6 og 26.9. For at gøre det vil vi bevæge os sammen med – eller flyde langs med – vektorfeltet i en meget præcis forstand, som vi nu vil definere.

26.2 Flowkurver for et vektorfelt

Lad os først repetere, at hvis vi har givet en kurve med en parameterfremstilling

$$K_r: \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad t \in [a, b] \quad , \quad (26-17)$$

så har denne kurve til enhver værdi af parameteren t en tangentvektor nemlig

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad . \quad (26-18)$$

Hvis vi betragter parameteren $t \in [a, b]$ som en *tids-parameter* for den bevægelse (af en partikel) i rummet, der er givet ved $\mathbf{r}(t)$, så er $\mathbf{r}'(t)$ hastigheden af partiklen til tidspunktet t .

Hvis vi konstruerer tilstrækkelig mange kurver (en kurve igennem ethvert punkt i rummet), der ikke skærer hverken sig selv eller hinanden får vi på den måde et vektorfelt i rummet.

Det oplagte *omvendte* spørgsmål er nu: Givet et startpunkt $p = (x_0, y_0, z_0)$ og givet et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ i rummet, findes der så en parametriseret kurve $\mathbf{r}(t)$ igennem p (med $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$), således at kurvens tangentvektorfelt hele vejen *langs med kurven* netop er det givne vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ *langs med kurven*? Hvis det er tilfældet så vil vi kalde kurven $\mathbf{r}(t)$ en *integralkurve* eller en *flowkurve* for vektorfeltet. Disse navne

skyldes dels at kurven kan findes ved integration (løsning af et differentiaalligningssystem) og dels at bevægelsen langs kurven er som at flyve eller flyde med det givne vektorfelt, altså med en fart og en retning, som vektorfeltet angiver på ethvert sted for bevægelsen, idet kravet til bevægelsen $\mathbf{r}(t)$ jo udtrykkes ved:

||| Definition 26.11 Flowkurver, Integralkurver

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et glat vektorfelt i rummet. En parametriseret kurve

$$K_{\mathbf{r}}: \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \quad t \in [a, b] \quad , \quad (26-19)$$

kaldes en *flowkurve* eller *integralkurve* for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ hvis $\mathbf{r}(t)$ opfylder flowkurve-ligningen:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t) \quad \text{for alle} \quad t \in [a, b] \quad , \quad (26-20)$$

som er ækvivalent med følgende første ordens differential-ligningssystem

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)))^{\top} = \begin{bmatrix} V_1(x(t), y(t), z(t)) \\ V_2(x(t), y(t), z(t)) \\ V_3(x(t), y(t), z(t)) \end{bmatrix} . \quad (26-21)$$

Hvis $\mathbf{V}(x, y, z)$ er givet og hvis vi har fået givet et startpunkt $p = \mathbf{r}(a)$ for en flowkurve, så er opgaven selvfølgelig den typiske, at finde løsningen til differentiaalligningssystemet med denne begyndelsesbetingelse, dvs. finde koordinatfunktionerne $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ således at $p = (x(a), y(a), z(a))$.



Med andre ord: Hvis vi har givet et vektorfelt i rummet så går opgaven ud på at starte en bevægelse af en partikel (en lille kugle) langs vektorfeltet sådan at kuglens hastighedsvektor til ethvert tidspunkt er givet ved vektorfeltets værdi i det punkt hvor kuglen befinder sig til det tidspunkt. Og det er naturligvis interessant at kunne afgøre *hvor* kuglen befinder sig efter lang tid. Og det er interessant at finde ud af, hvordan en kugle-hob (partikler som til start er tæt på hinanden) udvikler sig i tiden – bliver hoben tættere eller tyndere, mast sammen eller trukket ud?

Der gælder følgende eksistens- og entydighedssætning som er grundlaget for vore første eksempler og de første overvejelser om de naturlige spørgsmål der vedrører flowkurver

og deres opførsel.

|||| Sætning 26.12 Eksistens og entydighedssætningen

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt af første grad, givet ved en koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og en vektor $\mathbf{b}$ som i definition 26.4. Lad (x_0, y_0, z_0) betegne et vilkårligt punkt i rummet. Så findes der netop én kurve $\mathbf{r}(t)$, der opfylder de to betingelser:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (x_0, y_0, z_0) \quad \text{og} \\ \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{for alle } t \in [-\infty, \infty] \quad .\end{aligned}\tag{26-22}$$

Den sidste ligning (26.2.22) er ækvivalent med følgende differentialligningssystem med en konstant koefficientmatrix $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} &= (\mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)))^\top \\ &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^\top + \mathbf{b}^\top \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad .\end{aligned}\tag{26-23}$$

Hvis vi har givet et vektorfelt af første grad, så kan vi altså "starte" et punkt, en partikel, et vilkårligt sted i rummet og lade den "flyde" med vektorfeltet sådan at partiklen befinder sig på en entydigt bestemt flowkurve til enhver tid derefter.



To flowkurver kan ikke skære hinanden, fordi hvis de gjorde det ville der jo ikke være en *entydig* flowkurve igennem skæringspunktet.



Sætningen kan udvides til vektorfelter der ikke nødvendigvis er af første grad, men så er det ikke længere sikkert, at alle tids-parameterintervallerne for flowkurverne er hele det dobbeltuendelige interval $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. Integralkurverne for et vektorfelt af første grad kan findes og vises med Maple og er eksemplificeret i figurene 26.5, 26.6, og 26.7.

Hvis vektorfeltet ikke er af første grad er der som sagt ingen garanti for, at flowkurverne kan bestemmes explicit (heller ikke med Maple), men i visse tilfælde kan numeriske værktøjer jo alligevel benyttes med succes indenfor de "vinduer" hvor løsninger findes og er veldefinerede.

Begrundelsen, beviset, for sætning 26.12 er kendt fra studiet af systemer af lineære koblede differentialligninger, se eNote 17. Lad os kort repetere de overvejelser, der skal i sving ved at finde flowkurverne for nogle af de simpleste vektorfelter.

|||| Eksempel 26.13 Flowkurver for et konstant vektorfelt

Det konstante vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 7, 0)$ har flowkurver $(x(t), y(t), z(t))$ som skal opfylde de to betingelser: Begyndelsebetingelsen $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ og de 3 differentialligninger for $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$, som følger af hastighedsvektor-betingelsen

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) = (0, 7, 0) \quad . \quad (26-24)$$

Opgaven er at finde de tre koordinatfunktioner $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ sådan at

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0 \\ y'(t) &= 7 \\ z'(t) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (26-25)$$

De 3 differentialligninger er i dette tilfælde ikke koblede og de løses direkte med de angivne begyndelsebetingelser med følgende resultat: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0 + 7t$, og $z(t) = z_0$. Dvs. flowkurverne er (ikke overraskende) alle de rette linjer parallelle med y -aksen, parametriseret sådan at alle har farten 7.

|||| Eksempel 26.14 Flowkurver for et roterende vektorfelt

Eksemplet med det roterende vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ har tilsvarende flowkurver, der nu tilfredsstiller betingelserne: $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ samt differentialligningerne

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-y(t), x(t), 1) \quad . \quad (26-26)$$

Opgaven er altså her at finde de tre koordinatfunktioner $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ sådan at

$$\begin{aligned}x'(t) &= -y(t) \\y'(t) &= x(t) \\z'(t) &= 1\end{aligned}\quad (26-27)$$

Differentialligningerne for $x(t)$ og $y(t)$ er koblede lineære differentialligninger med konstante koefficienter og løses præcis som i eNote 12. Bemærk, at systemmatricen allerede er fundet i opgave 26.8. Resultatet er $x(t) = x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)$, $y(t) = x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)$, og $z(t) = z_0 + t$. Disse flowkurver kan findes og inspiceres med Maple. Det fremgår også deraf at det er ganske rimeligt at kalde vektorfeltet et roterende vektorfelt. Se figur 26.5.

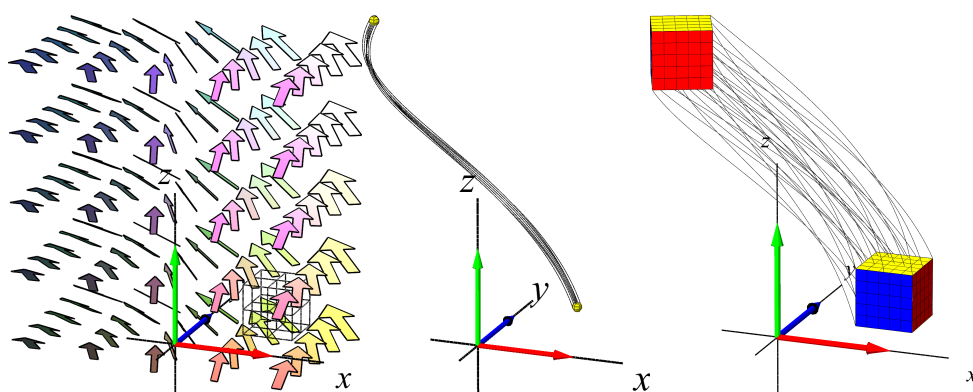


Figure 26.5: Det roterende vektorfelt fra eksempel 26.14, en "flowkurve" for en enkelt partikel og systemet af flowkurver, som går igennem en terning (den nederste terning flyder langs flowkurverne med vektorfeltet indtil tiden π).

|||| Opgave 26.15

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ og benyt Maple til at finde flowkurver og bevægelsen af punkter i samme terning som i figur 26.5 når tidsintervallet for flowet sættes til $T = [0, 2\pi]$. Sammenlign dernæst med 'virkningen' af vektorfelterne $\mathbf{W}(x, y, z) = (-y, -x, 0)$ $\mathbf{W}(x, y, z) = (-y, 2x, 0)$ på terningens punkter i samme tidsinterval. Forklar forskellene på de tre 'virkninger' af de tre forskellige vektorfelter på terningen.

|||| Eksempel 26.16 Flowkurver for et eksplosions- hhv. implosions-vektorfelt

Eksplosionsvektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z) \quad (26-28)$$

har flowkurver, der tilfredsstiller en begyndelsesbetingelse

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) \quad (26-29)$$

og differentialligningerne

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (26-30)$$

Vi finder de tre koordinatfunktioner $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ sådan at

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= y(t) \\ z'(t) &= z(t) \end{aligned} \quad (26-31)$$

Differentialligningerne for $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ er her u-koblede lineære differentialligninger, som let løses en af gangen. Resultatet er

$$x(t) = x_0 \exp(t) \quad , \quad y(t) = y_0 \exp(t) \quad , \quad \text{og} \quad z(t) = z_0 \exp(t) \quad (26-32)$$

Bemærk, at hvis $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ så er $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ for alle $t \in [-\infty, \infty]$. Flowkurven 'igennem' punktet $(0, 0, 0)$ er derfor ikke nogen egentlig 'kurve' men består 'kun' af punktet selv. Bemærk også, at alle andre flowkurver kommer vilkårligt tæt på punktet $(0, 0, 0)$ for $t \rightarrow -\infty$, idet $\exp(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$, men de går ikke igennem punktet. Hvis vi følger flowkurverne i figur 26.6 tilbage i tid fra $t = 0$ igennem negative værdier vil vi derfor se en eksponentielt aftagende *implosion* af terningen. Hvis vi derimod følger flowkurverne frem i tid fra $t = 0$ igennem større og større positive værdier for t vil vi se en eksponentielt voksende eksplosion af terningen. Flowkurverne kan igen findes og inspiceres med Maple. Se figur 26.6.

Implosionsvektorfeltet er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -y, -z) \quad (26-33)$$

med de "tids-omvendte" løsninger (i forhold til eksplosionsvektorfeltet)

$$x(t) = x_0 \exp(-t) \quad , \quad y(t) = y_0 \exp(-t) \quad , \quad \text{og} \quad z(t) = z_0 \exp(-t) \quad (26-34)$$

Se figur 26.7.

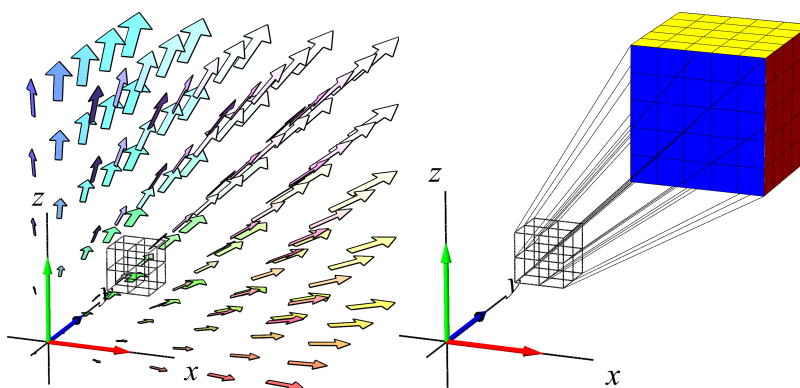


Figure 26.6: Eksplosionsvektorfeltet fra eksempel 26.16 sammen med de integralkurver, som går igennem en terning. Terningen er vist solid til tiden $t = 1$ og "åben" til tiden $t = 0$. Sammenlign med figur 26.7.

||| Opgave 26.17

Lad $\mathbf{V}$ betegne vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -2y, -3z)$. Find og vis et passende antal af flowkurverne for vektorfeltet igennem den kugle der har centrum i $(1, 0, 0)$ og radius $\frac{1}{4}$.

26.3 Divergensen af et vektorfelt

Med henblik på den geometriske analyse af vektorfelter og deres flowkurve-egenskaber vil vi her indføre to værktøjer, to begreber, til lokal beskrivelse af generelle glatte vektorfelter. Beskrivelsen er lokal fordi begge begreberne er udtrykt ved de partielle afledede af vektorfeltets koordinatfunktioner.

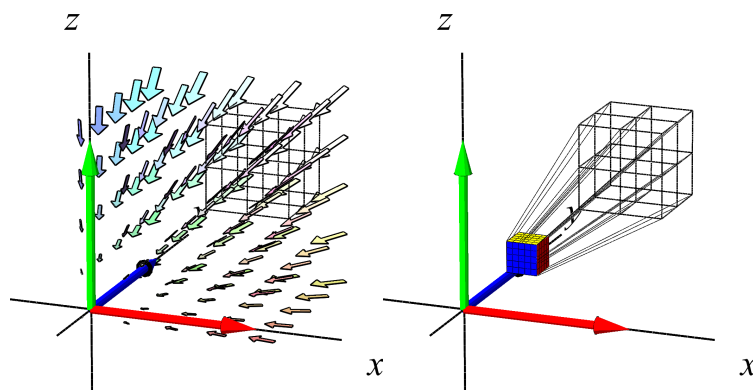


Figure 26.7: Implosionsvektorfeltet fra eksempel 26.16 sammen med de integralkurver, som går igennem en terning. Terningen er vist solid til tiden $t = 1$ og "åben" til tiden $t = 0$. Sammenlign med figur 26.6.

|||| Definition 26.18

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ være et vektorfelt i rummet. Divergensen af $\mathbf{V}$ i punktet (x_0, y_0, z_0) defineres således:

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \quad . \quad (26-35)$$

Hvis $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ er et *plant vektorfelt* definerer vi helt tilsvarende:

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x_0, y_0) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0) \quad . \quad (26-36)$$



Divergensen af et glat vektorfelt i $\mathbf{R}^3$ er en glat *funktion* i $\mathbf{R}^3$.



Læg mærke til, at divergensen af et plant vektorfelt er det samme som divergensen af feltets rumlige udvidelse.

|||| **Eksempel 26.19 Simple divergenser**

Ethvert konstant vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{b}$ har divergens $\text{Div}(\mathbf{V}) = 0$.

Eksplodingsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ har konstant divergens $\text{Div}(\mathbf{V}) = 3$.

Implosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ har divergensen $\text{Div}(\mathbf{V}) = -3$.

Det roterende vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ har også konstant divergens: $\text{Div}(\mathbf{V}) = 0$.

|||| **Opgave 26.20**

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (x + \sin(y), z + \cos(y), x + y - z)$. Bestem $\text{Div}(\mathbf{V})$ i ethvert punkt i rummet.

|||| **Opgave 26.21**

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt af første grad med matrix-fremstilling som i ligning (26.1.10). Vis, at divergensen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er konstant lig med sporet af $\mathbf{A}$.

|||| **Opgave 26.22**

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla h(x, y, z)$ være gradientvektorfeltet for en given funktion $h(x, y, z)$. Vis, at divergensen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er

$$\text{Div}(\nabla h(x, y, z)) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} . \quad (26-37)$$

I anvendelserne af vektoranalysen benyttes meget ofte divergensen af gradienvektorfelter for givne funktioner, $\text{Div}(\nabla h(x, y, z))$, som derfor gives sin egen betegnelse:

||| Definition 26.23

Lad $h(x, y, z)$ betegne en glat funktion i $\mathbb{R}^3$. Så skriver vi:

$$\begin{aligned}\Delta h(x, y, z) &= \text{Div}(\nabla h(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} .\end{aligned}\quad (26-38)$$

Funktionen $\Delta h(x, y, z)$ kaldes *den Laplace-afledede* af funktionen $h(x, y, z)$.

||| Eksempel 26.24 Laplace afledede

Laplace-afledede af nogle elementære funktioner af tre variable:

Funktion	$\nabla f(x, y, z)$	$\Delta f(x, y, z)$
$f(x, y, z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$	(a, b, c)	0
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	$(2x, 2y, 2z)$	6
$f(x, y, z) = y \cdot \sin(x)$	$(y \cdot \cos(x), \sin(x), 0)$	$-y \cdot \sin(x)$
$f(x, y, z) = e^x \cdot \cos(z)$	$(e^x \cdot \cos(z), 0, -e^x \cdot \sin(z))$	0

(26-39)


Den Laplace afledede af en glat funktion $f(x, y, z)$ er sporet af 3×3 -Hesse-matricen for f (se eNote 18):

$$\Delta f(x, y, z) = \text{spor}(\mathbf{H}f(x, y, z)) . \quad (26-40)$$

26.4 Rotationen af et vektorfelt

Det andet helt centrale begreb og værktøj til analyse af vektorfelter er følgende:

|||| Definition 26.25 Rotation af vektorfelt

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ være et vektorfelt i rummet. Rotationen af $\mathbf{V}$ i punktet (x_0, y_0, z_0) defineres som følgende vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = & \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \right. \\ & \frac{\partial V_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \\ & \left. \frac{\partial V_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) . \end{aligned} \quad (26-41)$$



Rotationen af et glat vektorfelt i $\mathbf{R}^3$ er selv et glat vektorfelt i $\mathbf{R}^3$.

|||| Eksempel 26.26 Rotation af simple vektorfelter

Eksplodingsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ har konstant rotation $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.

Implosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ har (ikke overraskende) også konstant rotation $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.

Det roterende vektorfeltet (som roterer *mod uret*) $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ har (heldigvis) konstant rotation forskellig fra $\mathbf{0}$: $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}) = (0, 0, 2)$.

Det roterende vektorfeltet (som roterer *med uret*) $\mathbf{V}(x, y, z) = (y, -x, 0)$ har (heldigvis) også konstant rotation som er den modsatte af rotationen mod uret: $\mathbf{Rot}(\mathbf{V}) = (0, 0, -2)$.

|||| Opgave 26.27

Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (x + \sin(y), z + \cos(y), x + y - z)$. Bestem $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})$ i ethvert punkt i rummet.

|||| Opgave 26.28

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt af første grad med matrix-fremstilling som i ligning (26.1.10). Vis, at rotationen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er en konstant vektor og udtryk vektoren ved elementerne i $\mathbf{A}$.

26.5 En bro mellem divergens og rotation

Vi nævner her nogle sammenhænge mellem divergens, rotation og gradientvektorfelter:

|||| Sætning 26.29 Divergens versus Rotation

Lad $h(x, y, z)$ betegne en glat funktion i rummet. Så er

$$\mathbf{Rot}(\nabla h) = \mathbf{0} \quad . \quad (26-42)$$

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ og $\mathbf{W}(x, y, z)$ betegne to vektorfelter i $\mathbb{R}^3$. Så gælder følgende identitet

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{W}) \quad . \quad (26-43)$$

Specielt har vi derfor: Hvis $\mathbf{W}$ er et gradient-vektorfelt for en funktion $h(x, y, z)$ i $\mathbb{R}^3$, dvs. på kort form $\mathbf{W} = \nabla h$, så er

$$\text{Div}(\mathbf{V} \times \nabla h) = \mathbf{Rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla h \quad . \quad (26-44)$$

|||| Opgave 26.30

Vis ved direkte udregning, at de to ligninger (26.5.42) og (26.5.43) begge er opfyldte.



Ud fra de helt simple overvejelser og eksempler vi har været igennem i denne eNote er det rimeligt at forvente, at divergensen er et mål for hvor meget en given samling af partikler spredes eller samles når de flyder med vektorfeltet. Det er netop indholdet af Gauss' sætning som er så vigtig for anvendelserne af disse begreber, at den har sin egen eNote26.

Tilsvarende må vi forvente, at den totale rotation af en samling af partikler, der flyder med vektorfeltet kan udtrykkes ved hjælp af rotationsvektorfeltet for det given vektorfelt. Det er netop indholdet af Stokes' sætning, der også – af samme grund – har sin helt egen eNote27.

26.6 Flow af kurver og flader

Som allerede antydnet med figurerne 26.5, 26.6, og 26.7 kan vi lade ethvert geometrisk veldefineret område, flade, eller kurve flyde med et givet vektorfelt – på den måde at ethvert punkt på objektet følger den entydige flowkurve for vektorfeltet, der netop går igennem punktet. Ideen er som sagt at forstå vektorfeltets geometri ved at observere hvordan det 'flyder rundt med' og deformerer geometriske objekter. Se også figurerne 26.8 og 26.9.

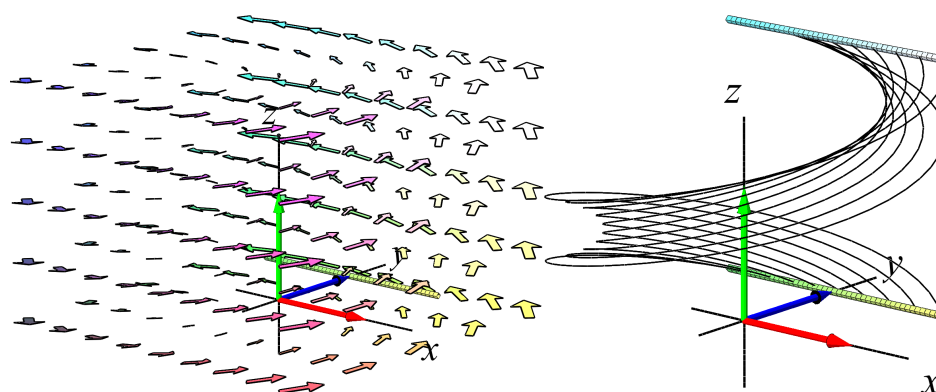


Figure 26.8: Et linjestykke flyder med flowkurverne for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0.3)$.

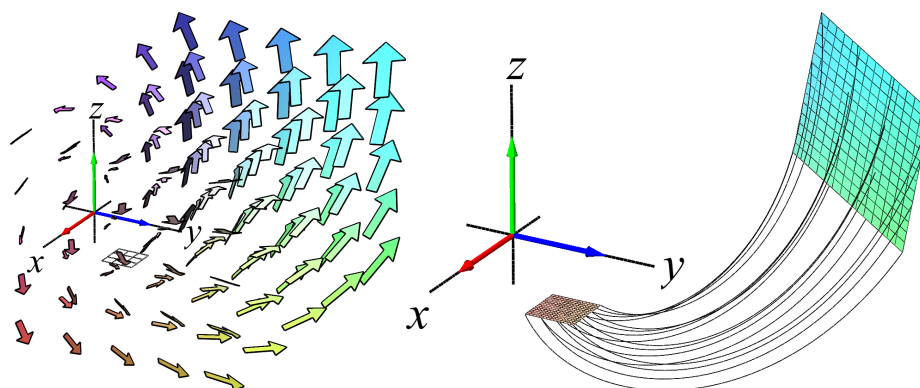


Figure 26.9: Et kvadrat flyder med flowkurverne for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y + (x/9), -z + (y/9), -x + (z/9))$.

26.6.1 Flow af niveaukurver og niveauflader

Gradientvektorfelterne for funktioner af to og tre variable deformerer også kurver og flader via de respektive flowkurver. Man kunne nu forledes til at tænke, at niveaukurver og niveauflader nok flyder over i andre niveaukurver og niveauflader ved gradientvektorflowet. Så simpelt er det ikke – men næsten.



Ved nærmere eftertanke vil man indse, at det heller ikke kan være rigtigt at gradientvektorfeltet generelt skulle flyde niveaumængder i niveaumængder. Hvis f.eks. to nabo-niveaukurver i figur 26.1.2 ligger tæt på hinanden, så er gradientvektoren tilsvarende stor og omvendt hvis to nabo-niveaukurver ligger længere fra hinanden, så er gradientvektoren tilsvarende mindre. Dvs. der hvor gradientvektorerne er store skal vi flyde langsomt og der for de er små skal vi flyde hurtigt for at niveaukurverne kan flyde over i hinanden.

||| Sætning 26.31 Niveau-mængde flow

Lad $f(x, y, z)$ betegne en glat funktion af tre variable med et egentligt gradientvektorfelt $\nabla f(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være det kvadratisk normerede gradientvektorfelt:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|^2} . \quad (26-45)$$

Hvis vi lader ethvert punkt p på niveaufladen $\mathcal{K}_c(f)$ flyde tiden t_0 med den flowkurve for $\mathbf{V}(x, y, z)$ som starter i p , så vil hele niveaufladen flyde over i niveaufladen $\mathcal{K}_{c+t_0}(f)$.

Et tilsvarende resultat gælder for gradientvektorfelter for glatte funktioner $f(x, y)$ af to variable og deres tilhørende niveaukurver i planen.

||| Bevis

Vi skal bare vise, at hvis vi starter (til tiden $t = 0$) i et punkt p hvor $f(p) = c$ så lander vi med flowkurven $\mathbf{r}(t)$ for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ efter tiden t_0 i et punkt $\mathbf{r}(t_0)$ hvor $f(x, y, z)$ har værdien $f(\mathbf{r}(t_0)) = c + t_0$.

Vi bruger kædereolen for tilvæksten af funktionsværdier langs en flowkurve, se eNote 15:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) , \quad (26-46)$$

og da $\mathbf{r}(t)$ er en flowkurve for $\mathbf{V}(x, y, z)$ ved vi, at $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$ som indsat i (26.6.46) giver:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) &= \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{r}(t))}{|\nabla f(\mathbf{r}(t))|^2} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \nabla f(\mathbf{r}(t))}{|\nabla f(\mathbf{r}(t))|^2} \\ &= 1 . \end{aligned} \quad (26-47)$$

Heraf fås det ønskede direkte:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t_0)) &= c + \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) dt \\ &= c + \int_0^{t_0} 1 dt \\ &= c + t_0 . \end{aligned} \quad (26-48)$$



26.7 Opsummering

Vi har i denne eNote etableret de første begreber og metoder til analyse af vektorfelter i plan og rum.

- Nogle men ikke alle vektorfelter fremkommer som gradientvektorfelter for funktioner $f(x, y, z)$ (her af tre variable):

$$\nabla f(x, y, z) = \left(f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z) \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (26-49)$$

- Ethvert vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ af første grad kan skrives og angives ved hjælp af en systemmatrix $\mathbf{A}$ og en konstant vektor $\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} V_1(x, y, z) \\ V_2(x, y, z) \\ V_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (26-50)$$

- For at forstå geometrien af et givet vektorfelt er det vigtigt at kunne bestemme vektorfeltets flow-kurver – det er de parametriserede kurver $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, som i alle kurve-punkter har det givne vektorfelt som tangentvektor. Hvis vektorfeltet er givet ved $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$, så er flowkurve-ligningen:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)))^\top = \begin{bmatrix} V_1(x(t), y(t), z(t)) \\ V_2(x(t), y(t), z(t)) \\ V_3(x(t), y(t), z(t)) \end{bmatrix}. \quad (26-51)$$

- Divergensen af et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ har vi defineret som den funktion, der i et vilkårligt punkt (x_0, y_0, z_0) har værdien:

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \quad (26-52)$$

og vi har antydnet med meget simple eksempler, at divergensen er et lokalt mål for hvor meget vektorfeltet spreder eller samler en given mængde af partikler, der flyder med vektorfeltet, dvs. følger vektorfeltets flowkurver.

- Rotationen af et vektorfelt har vi defineret som følgende vektorfelt

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = & \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \right. \\ & \frac{\partial V_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \\ & \left. \frac{\partial V_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right), \end{aligned} \quad (26-53)$$

og vi har antydnet med meget simple eksempler, at rotationen er et lokalt mål for hvor meget vektorfeltet roterer en given mængde af partikler, der flyder med vektorfeltet dvs. følger vektorfeltets flowkurver.