

|||| eNote 19

Funktioner af to variable

I denne og i de efterfølgende eNoter vil vi udvide funktionsbegrebet til at omfatte reelle funktioner af flere variable; vi starter udvidelsen med 2 variable, så vi vil i denne eNote definere værdimængder, kontinuitet, og differentiability af funktioner $f(x, y)$ af to variable, her x og y . Ligesom for funktioner af én variabel vil vi bruge epsilon-funktions-begrebet (nu ligeledes af to variable) til formålet.

19.1 Definitionsmængder

Ved beskrivelsen af en reel funktion $f(x, y)$ af to variable anføres dels de punkter (x, y) , i (x, y) -planen hvor funktionen er defineret, og dels de værdier, som kan fås ved at benytte funktionen på definitionsmængden. **Definitionsmængden** kalder vi $\mathcal{D}m(f)$ og **værdimængden** kalder vi $\mathcal{V}m(f)$. Det er især definitionsmængderne vi vil fokusere på her.

Som noget nyt i forhold til funktioner af én variabel er definitionsmængderne i planen generelt ikke så simple som intervallerne på den reelle talakse.

|||| Eksempel 19.1 Definitionsmængde for en funktion af to variable

Lad os se på en funktion $f(x, y)$ af to variable:

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{5 - x^2 - y^2}) \quad . \quad (19-1)$$

For hvilke punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ er denne funktion defineret? Vi har f.eks. at $f(0,0) = \ln(\sqrt{5})$, $f(2,0) = f(0,2) = 0$, $f(1,0) = f(0,1) = \ln(2)$, og faktisk er $f(\cos(t), \sin(t)) = \ln(2)$ for alle t , men $f(3,7)$ er ikke defineret for denne funktion. Ved inspektion af funktionen ses det, at definitionsområdet for $f(x, y)$ består præcis af de punkter, der ligger helt inde i den cirkelskive, der har centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$:

$$\mathcal{D}m(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \} \quad . \quad (19-2)$$

Læg mærke til, at cirkel-randen af cirkelskiven ikke er med i definitionsområdet.

Vi vil nu indføre nogle vigtige begreber til beskrivelse af definitionsområder og i øvrigt generelt til beskrivelse af vilkårlige delmængder af (x, y) -planen som kan være gode at benytte sig af, når man f.eks. skal tegne eller skitsere mængderne:

19.1.1 Åbne og afsluttede mængder i planen

|||| Definition 19.2 Åbne mængder i planen

En delmængde eller et område M i planen kaldes *en åben mængde* hvis ethvert punkt (x_0, y_0) i mængden er centrum for en eller anden (gerne meget lille) cirkelskive, som selv er helt indeholdt i M .

|||| Eksempel 19.3 En cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ er en åben mængde. Men mængden $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5 \}$ er *ikke* en åben mængde.

||| Definition 19.4 Randen af en mængde i planen, indre og ydre

Randen af et område M i planen består af de punkter (x_0, y_0) i planen som har følgende egenskab: Enhver cirkelskive med centrum i (x_0, y_0) indeholder både punkter som tilhører M og punkter som ikke tilhører M . Bemærk, randpunkterne for M ikke selv behøver at være med i mængden M . Mængden af randpunkter for M betegnes med ∂M .

Det indre af et område M er alle de punkter i M , som ikke ligger på randen af M . Det indre af M betegnes med $\overset{\circ}{M}$.

Det ydre af et område M i planen er alle de punkter i planen som ikke tilhører hverken M eller ∂M .

||| Eksempel 19.5 Randen af en åben cirkelskive

Mængden $\mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \}$ har randen:

$$\partial \mathcal{D}m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5 \} \quad . \quad (19-3)$$

||| Definition 19.6 Afslutningen af en mængde i planen

Hvis en mængde M tilføjes sine randpunkter ∂M fås *afslutningen* af mængden som betegnes med:

$$\bar{M} = M \cup \partial M \quad . \quad (19-4)$$

Hvis randpunkterne allerede er med i mængden M fås ikke derved nogen udvidelse af M . Mængden M kaldes *afsluttet* hvis $\bar{M} = M$.

||| Eksempel 19.7 Figuratit om åbne og afsluttede mængder

Mængden A i figur 19.1 er hverken åben eller afsluttet (der er nogle punkter på randen, som selv er med i mængden og der er andre punkter på randen som ikke er med i mængden). Tegne-forskriften er følgende: Punkter, der er med i mængden er grønne eller ligger på et

fuldt optrukket stykke af randen; punkter, der ikke er med i mængden er ikke farvede eller (hvis de er en del af randen) markerede med røde cirkler. Mængden B i figur 19.1 er en åben mængde. Mængden C i figur 19.1 er en afsluttet mængde.

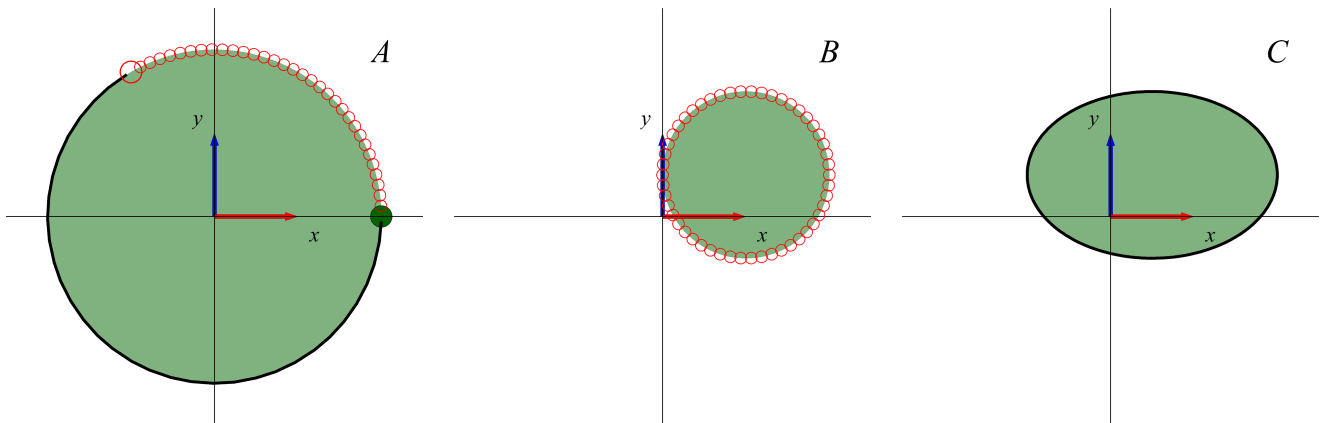


Figure 19.1: Områder i planen. Mængden A er hverken åben eller afsluttet, B er en åben mængde, og C er en afsluttet mængde.

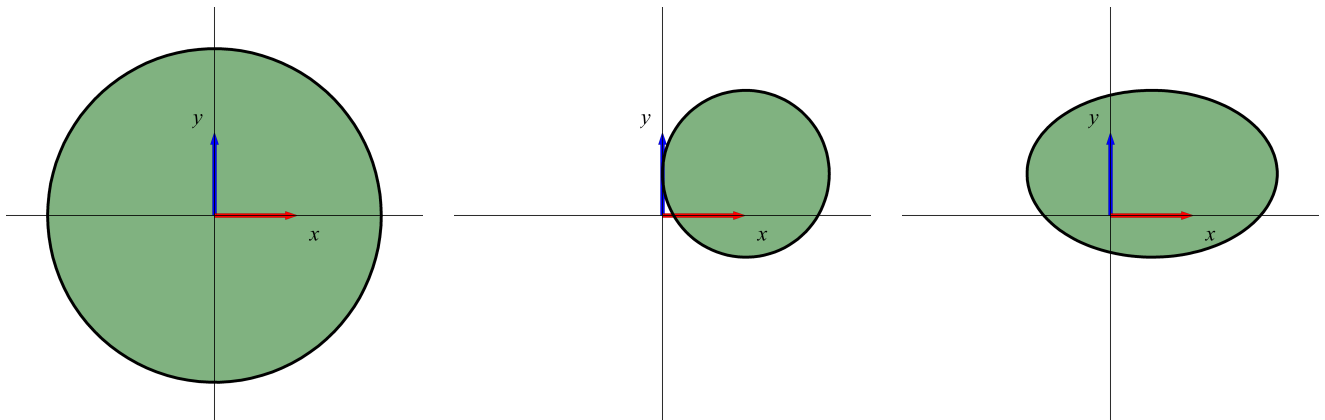


Figure 19.2: Afslutningerne $\bar{A}$, $\bar{B}$, og $\bar{C}$ af områderne A , B , og C fra figur 19.1.

19.1.2 Stjerneformede mængder i planen

||| Definition 19.8 Stjerneformede områder

Hvis ethvert punkt (x, y) i en mængde M i planen kan 'ses' fra et punkt (x_0, y_0) i mængden sådan at hele syns-linjestykket fra og med (x_0, y_0) til og med (x, y) er indeholdt i mængden, så siges M at være *stjerneformet* ud fra *stjernepunktet* (x_0, y_0) . Med andre ord: Ethvert punkt (x, y) i mængden kan forbindes med stjernepunktet med et linjestykke, der helt er indeholdt i mængden. Se figur 19.3.

||| Opgave 19.9 Stjerneform og dobbelt-stjerneform

Hvilke punkter i den mængde der er vist til venstre figur 19.3 kan bruges som stjernepunkter for mængden? Er mængden af samtlige mulige stjernepunkter afsluttet eller åben? I hvilken forstand ville man kunne sige, at figuren til højre i 19.3 er *dobbelt*-stjerneformet?

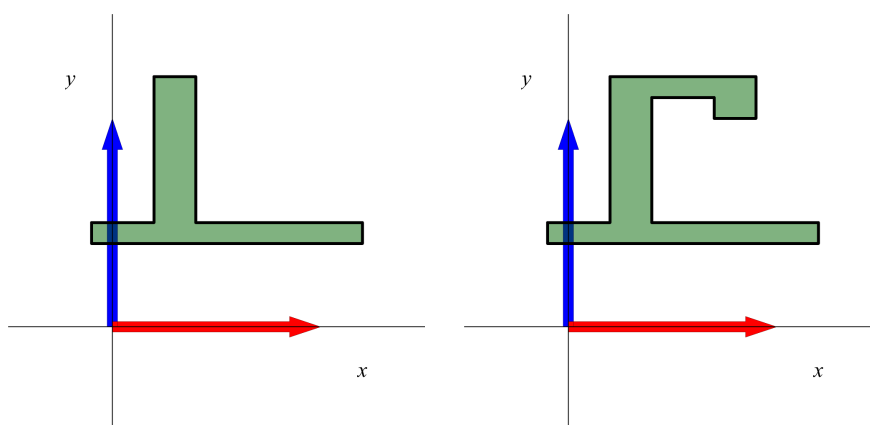


Figure 19.3: Mængden til venstre er stjerneformet. Mængden til højre er *ikke* stjerneformet.

19.1.3 Begrænsede mængder i planen

|||| Definition 19.10 Begrænsede mængder

En mængde M i planen siges at være *begrænset* hvis den er helt indeholdt i en (gerne meget stor) cirkelskive med centrum i $(0,0)$.

|||| Eksempel 19.11

De tre mængder A , B , og C i figur 19.1 er tydeligvis begrænsede – de er helt indeholdt i den cirkelskive som har centrum i $(0,0)$ og radius 100. Den mængde af punkter, der udgøres af punkterne på x -aksen er ikke begrænset.

19.1.4 Udvidelser af definitionsområdet til hele $\mathbb{R}^2$

Ligesom vi kan udvide definitionsområdet for funktioner af én variabel, kan vi gøre præcis det samme for funktioner $f(x,y)$ af to variable:

|||| Definition 19.12 Udvidelse af definitionsområdet

Givet funktionen $f(x,y)$ med definitionsområde $\mathcal{D}m(f)$, så definerer vi 0-udvidelsen $\hat{f}(x,y)$ af $f(x,y)$ på følgende måde:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{for } (x,y) \in \mathcal{D}m(f) \\ 0, & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}m(f) \end{cases} . \quad (19-5)$$

19.2 Grafer for funktioner af to variable

Med henblik på at illustrere funktioner af to variable tegner vi dem i rummet – vi plotter den punktmængde, der fremkommer ved at konstruere graferne i $\{\mathcal{O}, x, y, z\}$ -koordinatsystemet:

||| Definition 19.13 Grafer for funktioner af to variable

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable med definitionsmængden $\mathcal{D}m(f)$. Så er *graf* for en funktion af to variable givet ved:

$$z = f(x, y) \quad , \quad \text{hvor} \quad (x, y) \in \mathcal{D}m(f) \quad . \quad (19-6)$$

Grafen består altså af den punktmængde i rummet som vi også kan beskrive på følgende måde:

$$\mathcal{G}(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}m(f) \} \quad . \quad (19-7)$$

Hvert enkelt punkt på grafen fremkommer på følgende måde: Fra punktet $(x, y, 0)$ i (x, y) -planen går vi højden (med fortegn) $f(x, y)$ lodret op (eller ned) fra den (vandrette) (x, y) -plan og markere graf-punktet $(x, y, f(x, y))$ i den højde som funktionsværdien $f(x, y)$ foreskriver – lige over (eller under) punktet $(x, y, 0)$.

19.3 Niveau-mængder og højdesnit

I (x, y) -planen hvor funktionen $f(x, y)$ er defineret kan vi gøre noget helt andet for at vise, hvordan funktionsværdierne varierer fra punkt til punkt.

||| Definition 19.14 Niveau-mængder

For en funktion $f(x, y)$ af to variable definerer vi for ethvert reelt tal c den tilhørende *niveau-mængde* på følgende måde:

$$\mathcal{K}_c(f) = \{ (x, y) \in \mathcal{D}m(f) \mid f(x, y) = c \} \quad . \quad (19-8)$$

Mængden $\mathcal{K}_c$ kan være tom, hele planen, en kurve, eller hvilken som helst punktmængde i planen.

|||| Eksempel 19.15 Niveaumængder

Vi lader A betegne en vilkårlig mængde i planen og konstruerer en funktion $f(x, y)$ i hele planen på følgende måde:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x, y) \in A \\ 0 & \text{for } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases}, \quad (19-9)$$

dvs. f er 0-udvidelsen af den funktion, som er konstant 1 på A . Så er

$$\mathcal{K}_c(f) = \begin{cases} A & \text{for } c = 1 \\ \mathbb{R}^2 \setminus A & \text{for } c = 0 \\ \emptyset & \text{for } c \neq 1 \text{ og } c \neq 0 \end{cases}. \quad (19-10)$$

Ofte er niveau-mængden $\mathcal{K}_c$ dog meget mere velstruktureret og består typisk af en eller flere kurver. De kurver kan med fuld ret kaldes niveau-kurver eller højdekurver, for de angiver jo præcis de punkter (x, y) i definitionsmængden hvor funktionen antager værdien c og hvor grafen for f derfor lige præcis har højden (med fortegn) c over (x, y) -planen. Med andre ord, hvis vi skærer grafen for f med den vandrette plan $z = c$ i højden c over (x, y) -planen, så fås en snitkurve, hvis projektion ned i (eller op i) (x, y) -planen netop er $\mathcal{K}_c$, se figurerne 19.4 19.6, 19.5.



Nedenfor i afsnit 19.8.1 vil vi i ethvert punkt i definitionsmængden for $f(x, y)$ definere en vektor, gradientvektoren for $f(x, y)$, som har den særlige egenskab, at hvis den ikke er $\mathbf{0}$ i et åbent område omkring et givet punkt (x_0, y_0) , så er den niveau-mængde der indeholder (x_0, y_0) en kurve igennem punktet. Gradientvektorer er dog kun veldefinerede for differentiable funktioner, så den egenskab må vi derfor først have indført forfunktioner af to variable.

|||| Eksempel 19.16 Grafer og niveau-kurver

Følgende funktioner er alle definerede i hele (x, y) -planen.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -x + y + 2 \\ f(x, y) &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ f(x, y) &= \cos(3x) \cdot \sin(3y) \end{aligned} \quad (19-11)$$

Funktionernes grafer er vist i figurerne 19.4, 19.5, og 19.6 dels sammen med deres respektive niveau-kurver i (x, y) -planen og dels sammen med en figur, der antyder, hvordan

niveaukurverne i (x, y) -planen kan opfattes som projektioner af de højde-snit-kurver der fremkommer ved at skære graffladerne for funktionerne i forskellige højder, altså med planerne $z = c$, hvor c er den konstante værdi som den aktuelle funktion $f(x, y)$ antager p niveaukurven $\mathcal{K}_c$. Bemærk, at niveaumængderne $\mathcal{K}_c$ virkelig *er* kurver (eller punkter) i disse tilfælde.

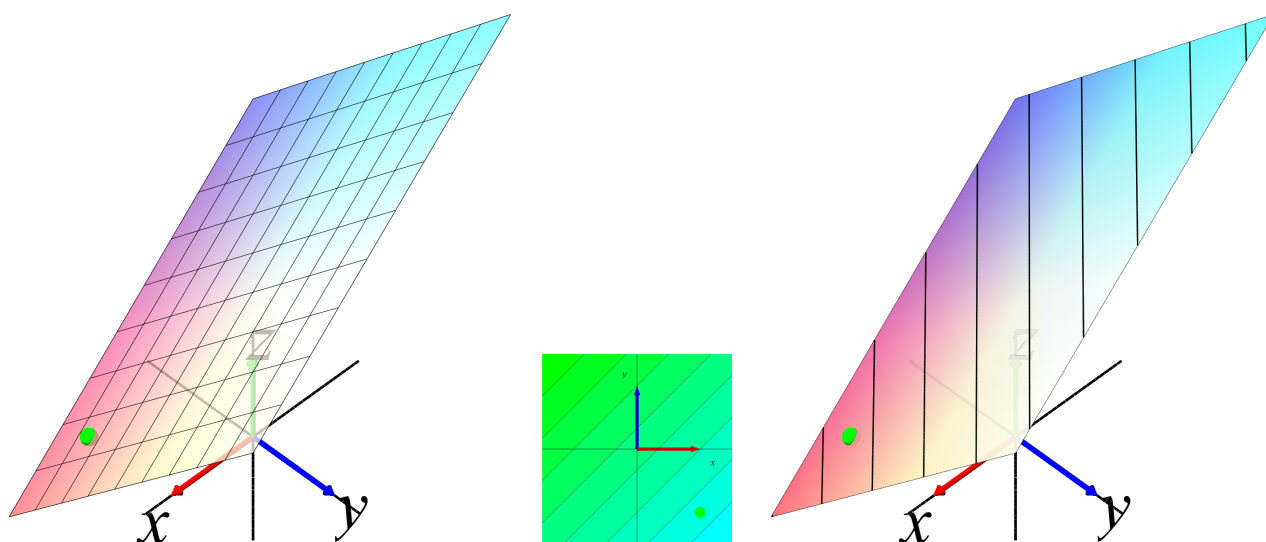


Figure 19.4: Grafen i (x, y, z) -rummet, niveaukurverne i (x, y) -planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = -x + y + 2$. Læg mærke til, at det naturligvis ikke er *hele* grafen for funktionen vi kan plotte. Her er kun vist det udsnit der hører til $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.

19.4 Epsilon-funktioner af to variable

En meget vigtig klasse af funktioner af to variable er afstandsfunktionerne. For ethvert punkt (x_0, y_0) i planen definerer vi afstanden til (x_0, y_0) på velkendt måde:

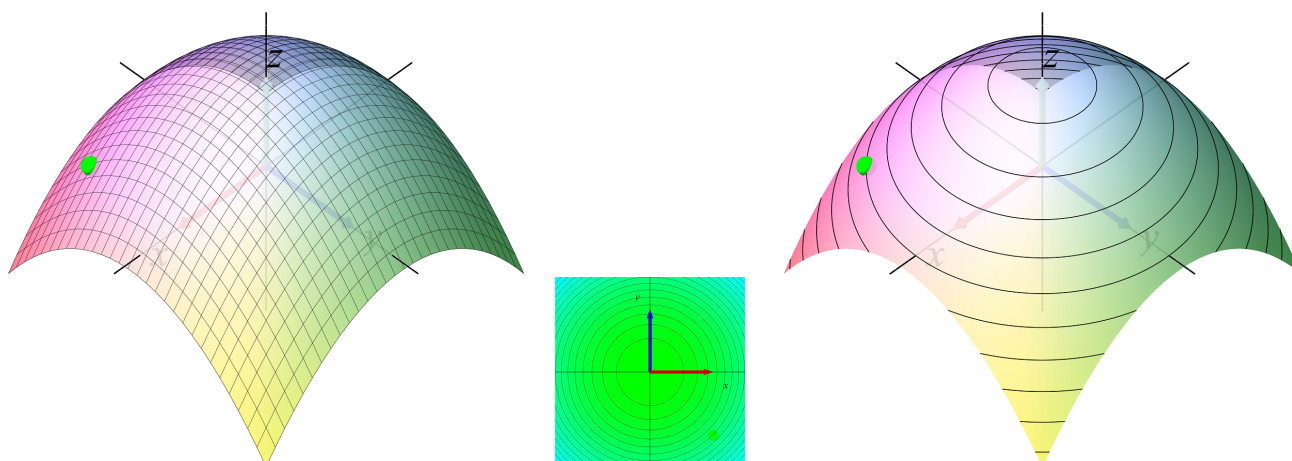


Figure 19.5: Grafen i (x, y, z) -rummet, niveaukurverne i (x, y) -planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

|||| Definition 19.17 Afstandsfunktioner

Afstanden fra et punkt (x, y) til et punkt (x_0, y_0) i (x, y) -planen betegnes med

$$\rho_{(x_0, y_0)}(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad . \quad (19-12)$$

Dette er den sædvanlige afstand mellem de to punkter (x, y) og (x_0, y_0) i planen – bestemt med Pythagoras' sætning.



Det er denne funktion vi vil bruge på samme måde som vi benyttede funktionen $(x - x_0)$ til definitionerne af epsilon-funktioner af én variabel og til definition af kontinuitet og differentierbarhed af funktioner af én variabel. Læg mærke til, at $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ altid er positiv eller 0; og læg mærke til at værdien 0 dog kun optræder for $(x, y) = (x_0, y_0)$. Funktionen $\rho_{(0,0)}(x, y)$, altså afstanden fra (x, y) til $(x_0, y_0) = (0, 0)$, er vist i figur 19.7. Læg mærke til, at niveaukurverne er ækvivalente, og at grafen er 'konisk spids' i kontaktpunktet til (x, y) -planen!

Vi er nu klar til at definere klassen af epsilonfunktioner af to variable:

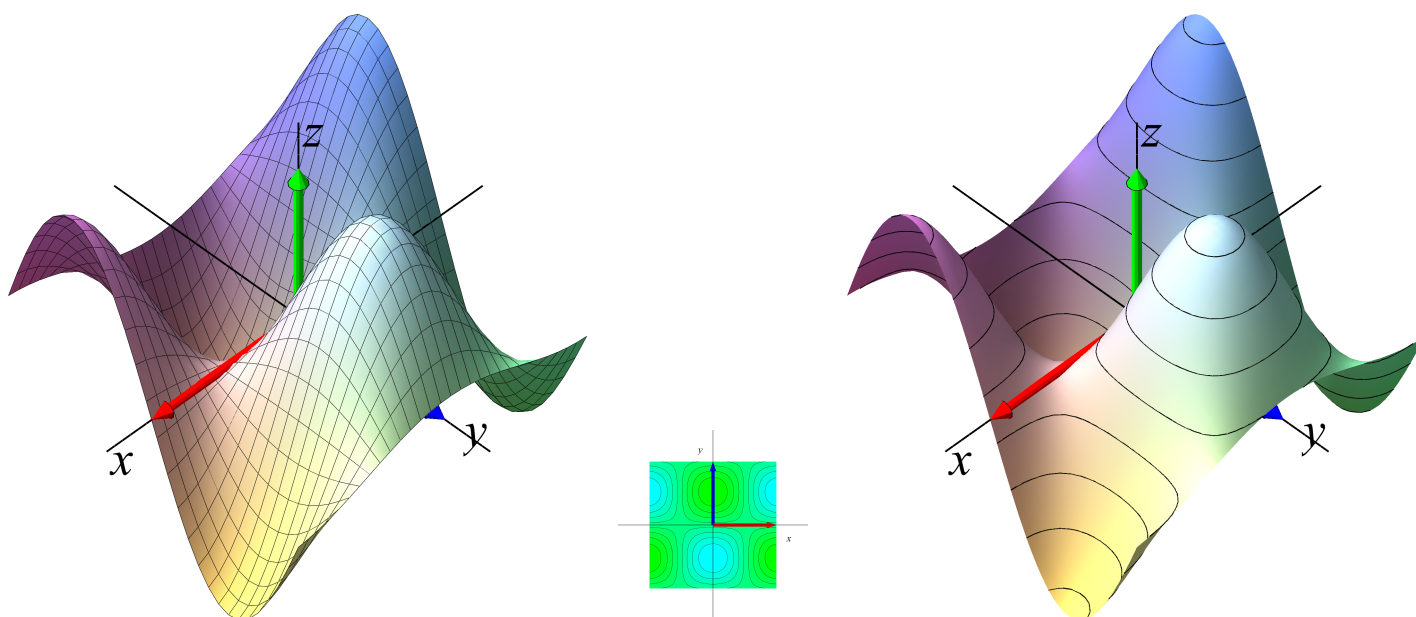


Figure 19.6: Grafen i (x, y, z) -rummet, niveaukurverne i (x, y) -planen, og højdesnitkurverne for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

|||| Definition 19.18 Epsilonfunktioner af to variable

Enhver funktion $\varepsilon(x, y)$ som er defineret i et åbent område i $\mathbb{R}^2$ indeholdende $(0, 0)$, og som antager værdien 0 i $(x, y) = (0, 0)$, og som derudover går imod 0 når (x, y) går imod $(0, 0)$ kaldes en **epsilon-funktion af** (x, y) . Epsilon-funktioner af to variable er altså karakteriserede ved egenskaberne:

$$\varepsilon(0, 0) = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad . \quad (19-13)$$

Den sidste betingelse betyder, at den numeriske værdi af funktionsværdierne $\varepsilon(x, y)$ kan gøres så lille som ønsket ved blot at vælge (x, y) *tilstrækkelig tæt på* $(0, 0)$. Helt præcis betyder betingelsen: For ethvert helt positivt tal k findes der et helt positivt tal K sådan at $|\varepsilon(x, y)| < 1/k$ for alle (x, y) med $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y) < 1/K$.



Det følger direkte af definitionen, at afstandsfunktionen $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ til et punkt (x_0, y_0) selv er en epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$.

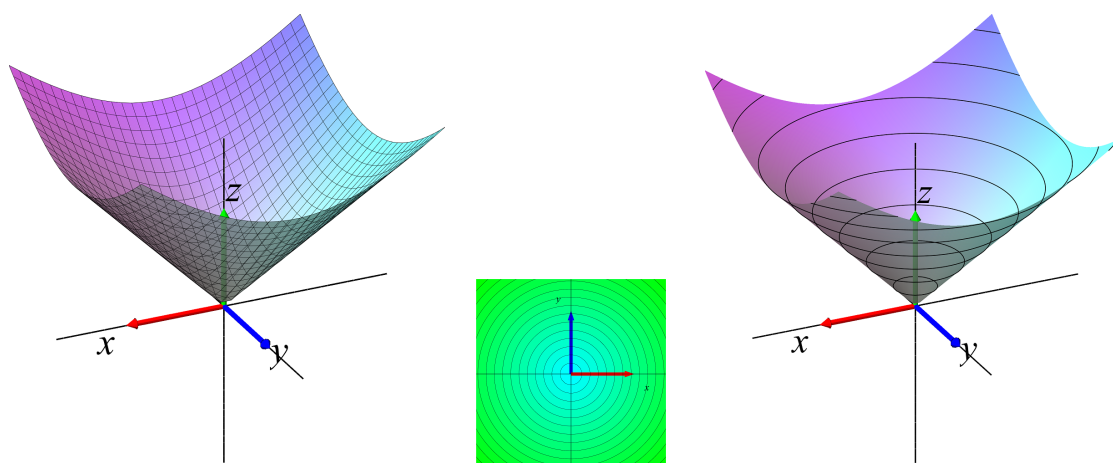


Figure 19.7: Grafen for afstandsfunktionen $\rho_{(0,0)}(x, y)$ til punktet $(x_0, y_0) = (0, 0)$, funktionens niveaukurver, og højdesnit-kurverne på grafen.

19.5 Kontinuerte funktioner af to variable

Som for funktioner af én variabel definerer vi kontinuitet for funktioner af to variable ved hjælp af klassen af epsilonfunktioner:

|||| Definition 19.19 Kontinuerte funktioner af to variable

En funktion $f(x, y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) hvis der eksisterer en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ sådan at følgende gælder i et åbent område der indeholder (x_0, y_0) :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \quad (19-14)$$

Hvis $f(x, y)$ er kontinuert i alle (x_0, y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi, at $f(x, y)$ er kontinuert i hele området.

Enhver epsilonfunktion af $x - x_0$ og $y - y_0$ som f.eks. $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ er derfor kontinuert i (x_0, y_0) . Grafer og niveaukurver kan ofte afsløre, om en funktion er kontinuert i et punkt.

||| Sætning 19.20 Inspektion af niveau-mængder

Hvis en funktion $f(x, y)$ har to niveau-mængder $\mathcal{K}_{c_1}$ og $\mathcal{K}_{c_2}$ (hvor $c_1 \neq c_2$) som begge indeholder punkter (x, y) vilkårligt tæt på (x_0, y_0) , så er $f(x, y)$ ikke kontinuert i (x_0, y_0) .

||| Bevis

Antag, at $f(x, y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) . Hvis vi går i mængden $\mathcal{K}_{c_1}$ hen mod (x_0, y_0) så skal (pr. kontinuitet) $f(x_0, y_0)$ være c_1 . Hvis vi derimod går i mængden $\mathcal{K}_{c_2}$ hen mod (x_0, y_0) får vi $f(x_0, y_0) = c_2$, hvilket er en modstrid, da $c_1 \neq c_2$.

■



To niveaukurver hørende til forskellige funktionsværdier for en funktion $f(x, y)$ kan ligge meget tæt på hinanden i (x, y) -planen – men altså ikke vilkårligt tæt – hvis funktionen er kontinuert.

||| Eksempel 19.21 En funktion som ikke er kontinuert

Vi ser på 0-udvidelsen $\hat{f}(x, y)$ af funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad , \quad \text{hvor} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad . \quad (19-15)$$

Det vil sige:

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad . \quad (19-16)$$

Funktionen kan inspiceres i figur 19.8. Ved den inspektion bemærkes, at niveaukurverne 'ligner parabler' igennem $(0, 0)$. Vi vil teste den hypotese, at det faktisk er parabler: Hvis vi sætter $y = c x^2$ (parabelligning) får vi følgende udregninger:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, c x^2) \\ &= \frac{x^2 c x^2}{x^4 + (c x^2)^2} \\ &= \frac{c x^4}{(1 + c^2) x^4} \\ &= \frac{c}{1 + c^2} \quad , \end{aligned} \quad (19-17)$$

hvilket netop betyder, at parablerne $y = cx^2$ er (indeholdt i) niveau-mængden $\mathcal{K}_{c/(1+c^2)}$. Da alle parablerne går igennem $(0,0)$ følger det af sætning 19.20 at funktionen $f(x,y)$ ikke er kontinuert i $(0,0)$.

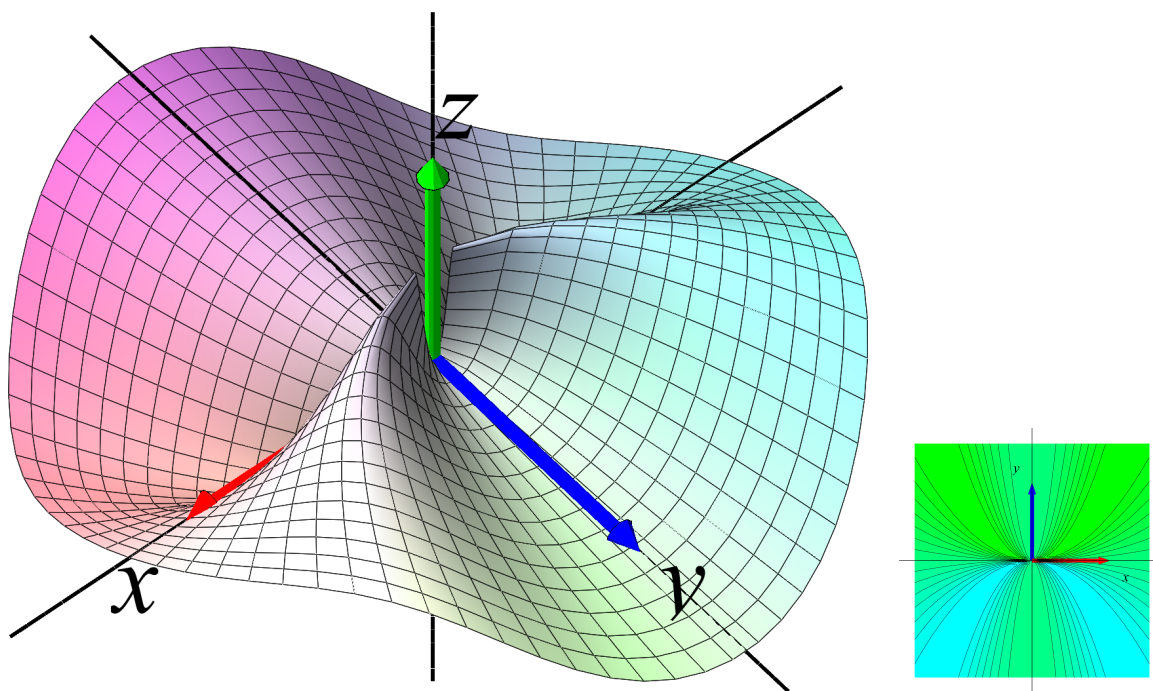


Figure 19.8: Grafen i rummet og niveaukurve-forløbet i planen for funktionen i eksempel 19.21.

|||| Opgave 19.22

Vis, at 0-udvidelsen $\hat{f}(x,y)$ af følgende funktion ikke er kontinuert i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad . \quad (19-18)$$

|||| Eksempel 19.23 Første-grads-polynomier er kontinuerte

Vi vil vise, at $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ er kontinuert i (x_0, y_0) . Det følger direkte af, at

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad , \quad (19-19)$$

sådan at

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad (19-20)$$

med epsilonfunktionen $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$. Overvej hvorfor dette er en epsilonfunktion.

|||| Opgave 19.24

Vis, at følgende anden-grads polynomium er kontinuert i $(0, 0)$:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad . \quad (19-21)$$

|||| Opgave 19.25

Vis, at 0-udvidelsen af følgende funktion er kontinuert i $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad . \quad (19-22)$$

|||| Eksempel 19.26 Kvadratroden af afstandsfunktionen

Funktionen $f(x, y) = \sqrt{\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)}$ er – ligesom $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$ selv – en epsilonfunktion og er derfor kontinuert i (x_0, y_0) . Se figur 19.9.

19.6 Differentiable funktioner af to variable

Langt de fleste af de funktioner vi betragter i Matematik 1 er differentiable i deres definitionsområder og af den grund også kontinuerte, som vi skal se nedenfor – jævnfør tilsvarende for funktioner af én variabel.

Differentiabilitet defineres som for funktioner af én variabel, men her igen ved brug af de indførte epsilonfunktioner af to variable:

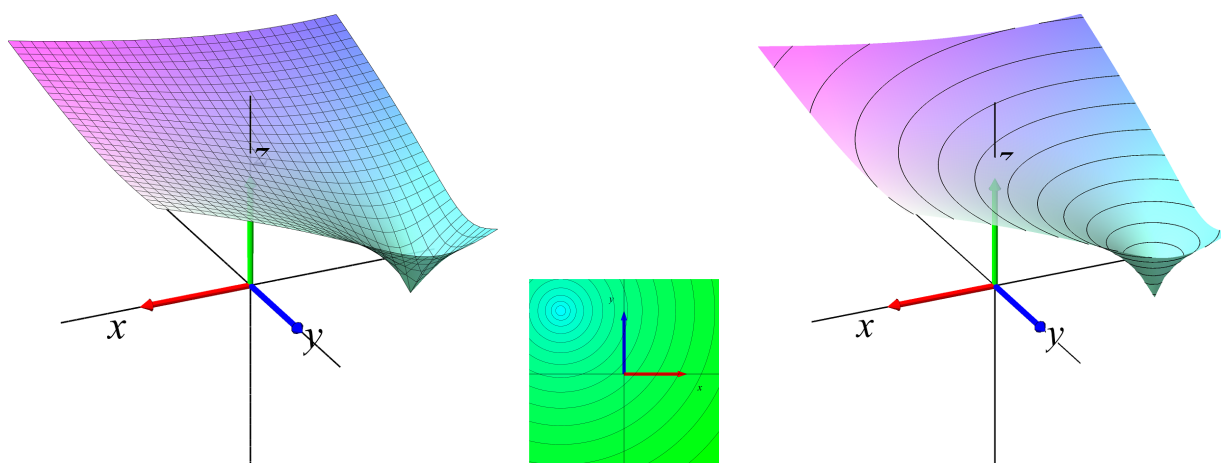


Figure 19.9: Grafen, niveau-kurverne, og højdesnitkurverne for kvadratroden af afstandsfunktionen til punktet $(x_0, y_0) = (-1, 1)$: $f(x, y) = \sqrt{\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)}$.

|||| Definition 19.27 Differentiabilitet og partielle afledede

En funktion $f(x, y)$ er differentiabel i $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}m(f)$ hvis der findes to konstanter a og b og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0, y - y_0)$ sådan at

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad (19-23)$$

Det er de to konstanter a og b vi herefter (når de findes, altså når $f(x, y)$ er differentiabel) kalder de **partielle afledede** af f i (x_0, y_0) . De betegnes henholdsvis:

$$a = f'_x(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad b = f'_y(x_0, y_0) \quad (19-24)$$

Med denne notation gælder altså – når $f(x, y)$ er differentiabel i (x_0, y_0) :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad (19-25)$$

||| Definition 19.28 Partielle afledede af partielle afledede

Hvis $f(x, y)$ er differentiable i alle punkter (x_0, y_0) i et givet åbent område i $\mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ siger vi, at $f(x, y)$ er differentiable i hele området. Vi skriver så ofte de partielle afledede af $f(x, y)$ på følgende måde, idet de jo dermed selv er funktioner af de to variable (x_0, y_0) :

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad . \quad (19-26)$$

Hvis disse partielle afledede af $f(x, y)$ selv er differentiable, kan vi fortsætte og finde de tilhørende *partielle afledede af de partielle afledede*, etc. De benævnes på følgende måde:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) \quad . \end{aligned} \quad (19-27)$$

Hvordan finder vi så konkret de partielle afledede af en given funktion $f(x, y)$, f.eks. $f(x, y) = x \cdot \sin(y)$? Det er ikke svært:

||| Sætning 19.29 Hjælpefunktioner giver partielle afledede

De partielle afledede af en funktion $f(x, y)$, der er differentiabel i (x_0, y_0) kan findes ved sædvanlig differentiation af to funktioner af én variabel. Sæt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x, y_0) \\ f_2(y) &= f(x_0, y) \end{aligned} \quad (19-28)$$

Så er funktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$ to funktioner af hver én variabel, henholdsvis x og y , og de er begge differentiable i henholdsvis x_0 og y_0 , og differentialkvotienterne er netop de partielle afledede:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0, y_0) = f'_2(y_0) \quad (19-29)$$

Med andre ord: Ved at indføre de to hjælpefunktioner af én variabel, $f_1(x)$ og $f_2(y)$, fås de partielle afledede af $f(x, y)$ ved at finde de sædvanlige differentialkvotienter af $f_1(x)$ og $f_2(y)$ i henholdsvis x_0 og y_0 .

||| Bevis

Hvis vi sætter $y = y_0$ overalt i ligning (19.6.25) får vi:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f(x, y_0) &= f_1(x_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \\ &\quad + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y_0) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, 0) \end{aligned} \quad (19-30)$$

sådan at koefficienten til faktoren $(x - x_0)$ lige præcis er $f'_x(x_0, y_0)$. Vi aflæser altså for det første, at $f_1(x)$ er differentiabel i x_0 og for det andet, at $f'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Og det var den ene halvdel af det vi skulle vise; den anden halvdel – vedrørende $f'_2(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$ – fås på helt tilsvarende måde. ■

||| Eksempel 19.30 Bestemmelse af partielle afledede

Vi vil bestemme de partielle afledede af funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 7y^3 + 10xy^7$ i ethvert punkt (x_0, y_0) i $\mathbb{R}^2$. Vi opstiller først de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x, y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0, y)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x^2 + 7y_0^3 + 10xy_0^7 \\ f_2(y) &= 3x_0^2 + 7y^3 + 10x_0y^7 \end{aligned} \quad (19-31)$$

De to hjælpefunktioner har differentialkvotienterne henholdsvis:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 6x + 0 + 10y_0^7 \quad \text{da } y_0 \text{ jo er en konstant her,} \\ f'_2(y) &= 0 + 21y^2 + 70x_0y^6 \quad \text{da } x_0 \text{ er en konstant} \end{aligned} \quad (19-32)$$

Heraf får vi dernæst hjælpefunktionernes differentialkvotienter i x_0 henholdsvis y_0 :

$$\begin{aligned} f'_1(x_0) &= 6x_0 + 10y_0^7 = f'_x(x_0, y_0) \\ f'_2(y_0) &= 21y_0^2 + 70x_0y_0^6 = f'_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (19-33)$$

Heraf fås generelt, det vil sige for alle (x, y) i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 6x + 10y^7 \\ f'_y(x, y) &= 21y^2 + 70xy^6 \end{aligned} \quad (19-34)$$

|||| Opgave 19.31

Vis (på samme måde som for differentiable funktioner af én variabel), at hvis $f(x, y)$ er differentiable i (x_0, y_0) , så er de to konstanter a og b , altså konstanterne $f'_x(x_0, y_0)$ og $f'_y(x_0, y_0)$, veldefinerede i følgende forstand: Der findes *ikke* to forskellige par af konstanter a_1, b_1 og a_2, b_2 og to epsilonfunktioner ε_1 og ε_2 sådan at der samtidig gælder:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + b_1 \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_1(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (19-35)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + a_2 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_2(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad .$$

|||| Opgave 19.32

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 7y^3 + 10xy^7$.

|||| Opgave 19.33

Bestem samtlige partielle afledede af de partielle afledede i ethvert punkt (x, y) for funktionen $f(x, y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y)$.

Den opmærksomme opgaveløser vil have observeret (f.eks. i opgaverne ovenfor) at $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$ typisk er ens! Det er ikke nogen tilfældighed, det gælder sædvanligvis at man kan nøjes med at beregne den ene af de to dobbeltafledede:

|||| **Sætning 19.34 De blandede dobbeltafledede er ens**

Hvis alle de 4 dobbelt afledede af en given funktion $f(x, y)$ er kontinuerte i et åbent område, så gælder i hele området:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad . \quad (19-36)$$

|||| **Opgave 19.35**

Vis (på samme måde som for funktioner af én variabel) at: Hvis en funktion $f(x, y)$ af to variable er differentiabel i et punkt (x_0, y_0) , så er funktionen også kontinuert i dette punkt. Vis også med et eksempel, at hvis en funktion er kontinuert i (x_0, y_0) , så behøver den ikke at være differentiabel i (x_0, y_0) . Se f.eks. på $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$.

Den opmærksomme vil også have noteret, at vi mangler en overvejelse: Hvis $f(x, y)$ er differentiabel i et punkt (x_0, y_0) , så findes de partielle afledede i konsekvens af differentibiliteten og de kan bestemmes ved hjælp af de differentiable hjælpefunktioner $f_1(x)$ og $f_2(y)$. Man kan nu med god grund spørge: Hvis de to hjælpefunktioner findes for en given funktion $f(x, y)$, og det viser sig, at de er differentiable i henholdsvis x_0 og y_0 , betyder det så, at $f(x, y)$ er differentiabel i (x_0, y_0) ?

Følgende sætning kaster lys over dette spørgsmål:

|||| **Sætning 19.36 Fra partielle afledede til differentibilitet**

Hvis $f(x, y)$ har partielle afledede (fundet via hjælpefunktionerne $f_1(x)$ og $f_2(y)$) i et åbent område A indeholdende (x_0, y_0) , og hvis de partielle afledede af $f(x, y)$ begge er kontinuerte i A , så er $f(x, y)$ differentierbar.

At der nødvendigvis må være en ekstra betingelse i sætning 19.36 følger af eksemplet

her:

|||| Eksempel 19.37 Differentiable hjælpefunktioner er ikke nok

Vi ser på 0-udvidelsen af følgende funktion:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad . \quad (19-37)$$

Den funktion er ikke differentiable i $(0, 0)$ – den er nemlig ikke engang kontinuert i $(0, 0)$ (!) (Hvorfor ikke?) Ikke desto mindre findes de to hjælpefunktioner

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x, 0) = 0 \\ f_2(y) &= f(0, y) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (19-38)$$

og som det ses, er de begge to særdeles differentiable i $(0, 0)$. Selv om hjælpefunktionerne er differentiable behøver den aktuelle funktion selv ikke at være differentiable.

19.7 Det approksimerende første-grads-polynomium

Som for funktioner af én variabel kan vi trункere udtrykket i ligning (19.6.25) ved simpelthen at fjerne 'epsilon-funktions-delen' hvorved vi står tilbage med et første-grads-polynomium i de to variable x og y :

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad . \quad (19-39)$$

Funktionen $P_{1,(x_0,y_0)}(x, y)$ kaldes det approksimerende første-gradspolynomium for $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0) .

Læg mærke til, at $P_{1,(x_0,y_0)}(x, y)$ virkelig *er* et første-grads-polynomium i de to variable x og y fordi de højst optræder med potensen 1 og alle andre faktorer og addender er konstanter.

|||| Eksempel 19.38 Paraboloide med tangentplan

Vi ser på funktionen

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad . \quad (19-40)$$

Så er

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= -x_0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= -y_0 \quad , \end{aligned} \quad (19-41)$$

sådan at

$$\begin{aligned} P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) &= f(x_0,y_0) - x_0 \cdot (x - x_0) - y_0 \cdot (y - y_0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2 - x \cdot x_0 + x_0^2 - y \cdot y_0 + y_0^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 - x \cdot x_0 - y \cdot y_0 \quad . \quad . \end{aligned} \quad (19-42)$$

Specielt får vi med udviklingspunktet $(x_0, y_0) = (1, -1)$:

$$P_{1,(1,-1)}(x,y) = y - x + 2 \quad . \quad (19-43)$$

Se figur 19.10, hvor grafen for dette approksimerende første-gradspolynomium for $f(x,y)$ er plottet sammen med grafen for funktionen selv. Højde-snit-kurverne og niveau-kurverne er ligeledes gengivet for begge funktionerne. I og omkring det markerede udviklingspunkt er funktionerne meget ens - grafen for det approksimerende førstegrads-polynomium med udviklingspunkt (x_0, y_0) fortjener helt klart at blive kaldt **tangentplanen** til grafen for $f(x,y)$ i punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

|||| Definition 19.39 Tangentplan til grafen for en funktion af to variable

Givet en differentiabel funktion $f(x,y)$. Tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ i punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er givet ved ligningen:

$$z = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) \quad , \quad (19-44)$$

hvor højresiden er det approksimerende polynomium af første grad for $f(x,y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0) .

|||| Opgave 19.40

Bestem det approksimerende første-grads-polynomium for følgende funktion i ethvert punkt (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = \cos(3x) \cdot \sin(3y) \quad . \quad (19-45)$$

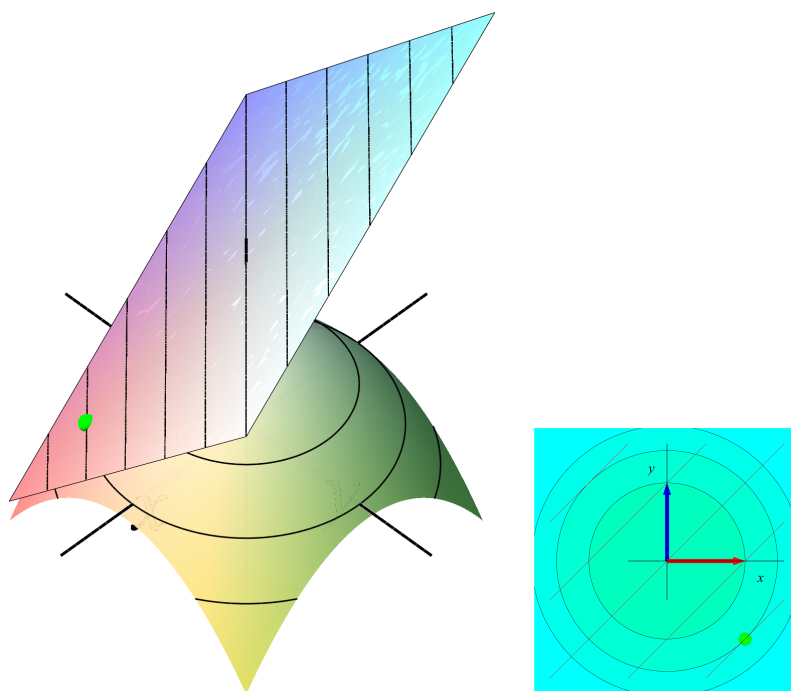


Figure 19.10: Tangentplanen approkserer grafen over udviklingspunktet og niveaulinjerne for det approkserende førstegradspolynomium approkserer niveaulinjerne for funktionen omkring udviklingspunktet i (x, y) -planen

19.8 Partielle afledede af sammensatte funktioner

Sammensatte funktioner af to variable optræder i rigtig mange anvendelser, lige fra GPS teknologi til geologi og termodynamik.

En sammensat funktion af to variable fås typisk således: Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable, hvor $(x, y) \in \mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}^2$ og lad $p(u, v)$ og $q(u, v)$ være to andre funktioner af to variable, hvor vi så antager, at $(u, v) \in \mathcal{D}m(p) \cap \mathcal{D}m(q) \subset \mathbb{R}^2$. Antager vi nu yderligere, at (u, v) tilhører et område A i $\mathbb{R}^2$ sådan at der gælder, at værdierne af $p(u, v)$ og $q(u, v)$ ligger i definitionsmængden for $f(x, y)$ i den forstand, at $(p(u, v), q(u, v)) \in \mathcal{D}m(f)$ for $(u, v) \in A$, så er den sammensatte funktion

$$h(u, v) = f(p(u, v), q(u, v)) \quad \text{veldefineret for alle } (u, v) \in A. \quad (19-46)$$

Vi vil sædvanligvis kun se på sammensatte funktioner som er definerede i hele planen, sådan at $A = \mathbb{R}^2$.

||| **Eksempel 19.41** Sammensatte funktioner af to variable

Lad $f(x, y)$, $p(u, v)$, og $q(u, v)$ være bestemt ved de angivne funktioner nedenfor. Så fås de tilsvarende sammensatte funktioner $h(u, v)$ ved at sætte $x = p(u, v)$, $y = q(u, v)$, og $h(u, v) = f(x, y) = f(p(u, v), q(u, v))$ i de respektive definitions-områder (de anføres ikke her):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y & , & \quad p(u, v) = 2u \cdot v & , & \quad q(u, v) = u^2 + v^2 & , & \quad h(u, v) = (u + v)^2 \\ f(x, y) &= y \cdot e^x & , & \quad p(u, v) = \ln(uv) & , & \quad q(u, v) = 1/uv & , & \quad h(u, v) = 1 \\ f(x, y) &= \sqrt{x + y} & , & \quad p(u, v) = u^4 & , & \quad q(u, v) = 8u^4 & , & \quad h(u, v) = 3 \cdot u^2 \end{aligned} \quad (19-47)$$

||| **Sætning 19.42** Kædereglen i planen

Lad $f(x, y)$, $p(u, v)$, og $q(u, v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u, v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u, v) = f(p(u, v), q(u, v)) \quad . \quad (19-48)$$

Så kan de partielle afledede af $h(u, v)$ udtrykkes ved hjælp af dels de partielle afledede af $f(x, y)$, dels de partielle afledede af $p(u, v)$, og dels de partielle afledede af $q(u, v)$. Vi vil udtrykke de partielle afledede af $h(u, v)$ i (u_0, v_0) så vi sætter $x_0 = p(u_0, v_0)$ og $y_0 = q(u_0, v_0)$.

Så har vi:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot p'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot q'_u(u_0, v_0) \\ h'_v(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot p'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot q'_v(u_0, v_0) \quad . \end{aligned} \quad (19-49)$$

||| **Bevis**

Resultatet følger efter præcis samme opskrift som beviset for differentiation af den sammensatte funktion $f(g(x))$ af én variabel – der er bare lidt flere konstanter og funktioner at holde styr på.



||| Opgave 19.43

Bestem de partielle afledede i ethvert punkt (u, v) for hver af de sammensatte funktioner nedenfor – dels ved at beregne dem direkte ud fra det givne eksplicite udtryk for $h(u, v)$ og dels ved at benytte kædereolen og de partielle afledede af ingredienserne i $h(u, v)$, altså de partielle afledede af $f(x, y)$, $p(u, v)$ og $q(u, v)$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y & , & \quad p(u, v) = 2u \cdot v & , & \quad q(u, v) = u^2 + v^2 & , & \quad h(u, v) = (u + v)^2 \\ f(x, y) &= y \cdot e^x & , & \quad p(u, v) = \ln(uv) & , & \quad q(u, v) = 1/uv & , & \quad h(u, v) = 1 \\ f(x, y) &= \sqrt{x + y} & , & \quad p(u, v) = u^4 & , & \quad q(u, v) = 8u^4 & , & \quad h(u, v) = 3 \cdot u^2 \end{aligned} \quad (19-50)$$



Læg mærke til, at hver af de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u, v) = f(p(u, v), q(u, v))$ i et punkt (u_0, v_0) effektivt kan udtrykkes ved prikprodukter hvori indgår en fælles faktor, nemlig vektoren $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ hvor $x_0 = p(u_0, v_0)$ og $y_0 = q(u_0, v_0)$:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0, v_0) &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \cdot (p'_u(u_0, v_0), q'_u(u_0, v_0)) \\ h'_v(u_0, v_0) &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \cdot (p'_v(u_0, v_0), q'_v(u_0, v_0)) \quad . \end{aligned}$$

19.8.1 Gradientvektorer

||| Definition 19.44 Gradientvektor

Lad $f(x, y)$ betegne en differentiable funktion af to variable. De partielle afledede af $f(x, y)$ i et punkt (x_0, y_0) definerer **gradientvektoren for $f(x, y)$ i (x_0, y_0)** på følgende måde:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right) . \quad (19-51)$$

På denne måde får vi altså defineret en ganske bestemt vektor i ethvert punkt, hvor $f(x, y)$ er differentiablel:

$$\nabla f(x, y) = \left(f'_x(x, y), f'_y(x, y) \right) . \quad (19-52)$$

Hvis vi for ethvert fodpunkt (x_0, y_0) afsætter gradientvektoren $\nabla f(x_0, y_0)$ for $f(x, y)$ ud fra det fodpunkt i planen $\mathbb{R}^2$ får vi konstrueret **gradientvektorfeltet** for $f(x, y)$.

||| Opgave 19.45

Bestem gradientvektorfeltet i ethvert punkt (x, y) for hver af følgende funktioner i deres respektive definitionsområder: $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = y \cdot e^x$, og $f(x, y) = \rho_{x_0, y_0}^2(x, y)$.

Ved hjælp af gradientvektorfeltet $\nabla f(x, y)$ for $f(x, y)$ kan vi nu formulere de partielle afledede af den sammensatte funktion $h(u, v) = f(p(u, v), q(u, v))$ lidt smartere:

||| Sætning 19.46 Kædereglens udtryk med gradienten af $f(x, y)$

Lad $f(x, y)$, $p(u, v)$, og $q(u, v)$ være tre differentiable funktioner - hver af to variable. Lad $h(u, v)$ betegne den sammensatte funktion

$$h(u, v) = f(p(u, v), q(u, v)) . \quad (19-53)$$

Så kan de partielle afledede af $h(u_0, v_0)$ med hensyn til henholdsvis u og v i (u_0, v_0) udtrykkes ved gradienten af $f(x, y)$ i $(x_0, y_0) = (p(u_0, v_0), q(u_0, v_0))$:

$$\begin{aligned} h'_u(u_0, v_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (p'_u(u_0, v_0), q'_u(u_0, v_0)) \\ h'_v(u_0, v_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (p'_v(u_0, v_0), q'_v(u_0, v_0)) \end{aligned} \quad (19-54)$$

19.8.2 Kædereglen 'langs' kurver i planen

Hvis funktionerne $p(u, v)$ og $q(u, v)$ kun afhænger af den ene variable u kan vi selvfølgelig betegne funktionerne med henholdsvis $p(u)$ og $q(u)$. Den sammensatte funktion $h(u) = f(p(u), q(u))$ – hvor $f(x, y)$ er en givet differentiable funktion i planen – angiver så de funktionsværdier, som $f(x, y)$ antager *langs den kurve* i planen, som er givet ved de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

|||| Definition 19.47 Parametriserede kurver i planen

En *kurve i planen* består af en punktmængde $\mathcal{C}$ i planen, som vi vil antage er givet ved to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ på følgende måde:

$$\mathcal{C}_r : \mathbf{r}(u) = (p(u), q(u)) \quad \text{hvor} \quad u \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R} . \quad (19-55)$$

Det vil sige, at kurven er en parametriseret punktmængde med stedvektorerne $\mathbf{r}(u)$ og parameteren u i et givet interval. Kurven er *differentiable* hvis de to funktioner $p(u)$ og $q(u)$ begge er differentiable i hele intervallet $] \alpha, \beta[$.

Den parametriserede kurve siges at være *regulær*, hvis $\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0}$ for alle $u \in]\alpha, \beta[$.

|||| Sætning 19.48 Tangent til kurve

Lad $\mathcal{C}_r$ betegne en differentiable kurve med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u)$ og antag at $\mathbf{r}'(u_0) \neq (0, 0)$. Tangenten L_{u_0} (igennem punktet $\mathbf{r}(u_0)$) til $\mathcal{C}_r$ er så givet ved følgende parameterfremstilling:

$$L_{u_0} : \mathbf{T}(t) = \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R} . \quad (19-56)$$

||| Bevis

Vi nøjes med at se på det tilfælde hvor $p(u)$ er meget elementær: $p(u) = u$. Så er $\mathcal{C}_r$ simpelthen grafen for funktionen $q(x)$ i (x, y) -planen. Grafen for den funktion har en tangent i punktet $(x_0, q(x_0))$, som er givet ved ved det velkendte udtryk: $y = q(x_0) + q'(x_0)(x - x_0)$. En parameterfremstilling for den tangent er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= (x_0, q(x_0)) + t \cdot (1, q'(x_0)) \\ &= (p(u_0), q(u_0)) + t \cdot (p'(u_0), q'(u_0)) \quad (\text{fordi } x = p(u) = u) \\ &= \mathbf{r}(u_0) + t \cdot \mathbf{r}'(u_0) \quad , \end{aligned} \quad (19-57)$$

og det var det, vi skulle indse. ■

Vi kan nu undersøge hvordan kædereglen ser ud og simplificeres langs parametriserede kurver – vi skal blot 'bruge' den generelle kæderegler på de to v -uafhængige funktioner $p(u)$ og $q(u)$:

||| Sætning 19.49 Kædereglen langs kurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$ være en differentiabel parametriseret kurve i (x, y) -planen. En differentiabel funktion $f(x, y)$ antager så værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs kurven. Den sammensatte funktion $h(u)$ af den ene variabel u er differentiabel, og

$$h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = \nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \quad . \quad (19-58)$$

||| Bevis

Resultatet følger direkte af den øverste ligning i (19.8.54). Bemærk, at funktionerne $h(u)$, $p(u)$, og $q(u)$ jo ikke afhænger af v , sådan at den nederste ligning i (19.8.54) reducerer til $0 = 0$. ■

Motiveret af dette simple udtryk for den afledede af funktionen $f(x, y)$ langs en parametriseret kurve $\mathbf{r}(u)$ indfører vi den **retningsafledede af funktionen** i den retning fra et givet punkt (x_0, y_0) som er givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$:

||| Definition 19.50 Retningsafledede

Den **retningsafledede** af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) i retningen med enhedsretningsvektor $\mathbf{e}$ betegnes med $f'((x_0, y_0); \mathbf{e})$ og er givet ved prikproduktet:

$$f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e} \quad . \quad (19-59)$$

Kædereglen langs kurver kan nu formuleres ved hjælp af den retningsafledede:

||| Sætning 19.51 Kæderegul langs kurver udtrykt ved retningsafledede

Funktionen $f(x, y)$ antager værdierne $h(u) = f(p(u), q(u)) = f(\mathbf{r}(u))$ langs $\mathbf{r}(u)$. Hvis $\mathbf{r}(u)$ er en regulær parameterfremstilling for kurven får vi differentialkvotienten af $h(u)$:

$$h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u)) = f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) \cdot |\mathbf{r}'(u)| \quad . \quad (19-60)$$



Læg mærke til, at den afledede af den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ i et punkt på kurven $\mathbf{r}(u)$ kun afhænger af tangentvektoren til kurven i punktet – $h'(u)$ er uafhængig af 'resten' af kurven.

||| Eksempel 19.52 Retningsafledede

Funktionen $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ har de partielle afledede

$$f'_x(x, y) = 4x \quad , \quad f'_y(x, y) = 6y \quad , \quad (19-61)$$

og derfor gradientvektorfeltet

$$\nabla f(x, y) = (4x, 6y) \quad (19-62)$$

Den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0) = (1, 1)$ i retningen bestemt ved $\mathbf{e}(\theta) =$

$(\cos(\theta), \sin(\theta))$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$ er derfor:

$$f'((1, 1); (\cos(\theta), \sin(\theta))) = 4 \cos(\theta) + 6 \sin(\theta) \quad . \quad (19-63)$$

19.8.3 Kædereglen 'langs' *niveau*-kurver for en funktion

En kurve $(p(u), q(u))$ som er niveaukurve for en funktion $f(x, y)$ giver anledning til en særlig simpel – og meget vigtig – version af kædereglen:

|||| Sætning 19.53 Kædereglen langs niveaukurver

Lad $\mathbf{r}(u) = (p(u), q(u))$ være en parametriseret kurve i (x, y) -planen. Antag, at kurven er en niveau-kurve for $f(x, y)$, dvs. $f(x, y)$ er en konstant c langs hele kurven,

$$f(p(u), q(u)) = c \quad \text{for alle } u \quad . \quad (19-64)$$

Så er

$$\nabla f(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0 \quad . \quad (19-65)$$

Med andre ord: Gradienten for en funktion $f(x, y)$ er i ethvert punkt hvor den ikke er 0 vinkelret på den niveau-kurve for $f(x, y)$ som går igennem punktet:

$$\nabla f(\mathbf{r}(u)) \perp \mathbf{r}'(u) \quad . \quad (19-66)$$

|||| Bevis

Funktionen $h(u) = f(p(u), q(u)) = c$ har tydeligvis $h'(u) = 0$ og da sætning 19.49 giver $h'(u) = \nabla f(p(u), q(u)) \cdot (p'(u), q'(u))$ fås resultatet. ■



Læg mærke til, at sætning 19.53 mere end antyder en anden sætning, som vi dog ikke vil vise her: Hvis en differentiabel funktion $f(x, y)$ har et egentligt gradientvektorfelt – dvs. hvis $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ for alle (x, y) i et givet åbent område A i definitionsmængden – så består alle niveau-mængderne for $f(x, y)$ i A af pæne kurver, dvs. de kan parametriseres med differentiable vektorfunktioner $\mathbf{r}(u)$ som ovenfor.

19.9 Opsummering

Funktioner af to variable er behandlet i denne eNote efter samme 'skema' som funktioner af én variabel: Definitionsmængderne er her delmængder af planen og giver derfor anledning til nye begreber og deskriptorer, som kan bruges til beskrivelse af generelle mængder i planen. Vi har indført og illustreret begreberne: Åbne, afsluttede, begrænsede, og stjerneformede mængder samt defineret det indre af en mængde og det ydre af en mængde. Grafer og niveau-mængder for en funktion er vigtige hjælpemidler til at forstå hvordan funktionsværdierne $f(x, y)$ 'opfører sig' i afhængighed af hvor punktet (x, y) befinder sig i definitionsmængden. Kontinuitet og differentiability (eller mangel på samme) for en funktion kan ofte inspiceres ved at konstruere eller tegne grafen for funktionen eller ved at tegne niveau-mængderne for funktionen.

- Niveaumængden hørende til værdien c for funktionen $f(x, y)$ er givet ved

$$\mathcal{K}_c(f) = \{ (x, y) \in \mathcal{D}m(f) \mid f(x, y) = c \} \quad . \quad (19-67)$$

- En funktion $f(x, y)$ er kontinuert i (x_0, y_0) hvis $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ er en epsilon-funktion af $x - x_0, y - y_0$, dvs.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \quad (19-68)$$

- En funktion $f(x, y)$ er differentiabel med de partielle afledede $f'_x(x_0, y_0)$ og $f'_y(x_0, y_0)$ i (x_0, y_0) hvis

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \rho_{(x_0, y_0)}(x, y) \cdot \varepsilon_f(x - x_0, y - y_0) \quad . \end{aligned} \quad (19-69)$$

- De partielle afledede af $f(x, y)$ i et punkt (x_0, y_0) kan findes ved at beregne de sædvanlige differentialkvotienter af de to hjælpefunktioner $f_1(x) = f(x, y_0)$ og $f_2(y) = f(x_0, y)$ i henholdsvis x_0 og y_0 :

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{og} \quad f'_y(x_0, y_0) = f'_2(y_0) \quad (19-70)$$

- Det approksimerende førstegradspolynomium for $f(x, y)$ med udviklingspunkt (x_0, y_0) er givet ved:

$$P_{1, (x_0, y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad . \quad (19-71)$$

- Tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er givet ved:

$$z = P_{1, (x_0, y_0)}(x, y) \quad . \quad (19-72)$$

- Gradientvektorfeltet for en funktion $f(x, y)$ er givet ved:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right) \quad . \quad (19-73)$$

- Den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet (x_0, y_0) i retningen givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e}$ er givet ved:

$$f'((x_0, y_0); \mathbf{e}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e} \quad . \quad (19-74)$$