eNote 17

Lineære 1. ordens differentialligningssystemer

Denne eNote beskriver 1. ordens differentialligningssystemer og viser, hvordan de kan løses. Der bruges egenværdier og egenvektorer i løsningsproceduren, se eNote 13 og eNote 14.
Version: 22.11.18

Vi vil her kigge på lineære koblede homogene differentialligninger af 1. orden med konstante koefficienter (se eventuelt forklaring 17.1). Sådan en samling af ***koblede differentialligninger*** kaldes et ***differentialligningssystem***. Et differentialligningssystem af 1. orden med n ligninger ser principielt således ud:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \dots & + & a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \dots & + & a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \dots & + & a_{nn}x_n(t) \end{array} \tag{17-1}$$

I systemets venstreside er differentialkvotienterne af de n ukendte funktioner $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ linet op. Mens hver højreside er en linearkombination af de n ukendte funktioner. Koefficienterne (a'erne) er reelle konstanter. I matrix-format kan systemet skrives således:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{17-2}$$

Endnu mere kompakt skrives det

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{17-3}$$

$\mathbf{A}$ kaldes ***systemmatricen***. Det er nu målet at løse et sådant differentialligningssystem, altså bestemme $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

|||| Forklaring 17.1 Hvad er et differentialligningssystem?

Differentialligningssystemer er samlinger af differentialligninger. Grunden til, at man ikke betragter differentialligningerne enkeltvis, er, at de ikke kan løses hver for sig, fordi de samme ukendte funktioner optræder i flere ligninger. Altså er ligningerne *koblede*. En enkelt differentialligning fra et system kan for eksempel se således ud:

$$x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \tag{17-4}$$

Det er ikke muligt at bestemme hverken $x_1(t)$ eller $x_2(t)$, da der er to ukendte funktioner, men kun én differentialligning.

For at kunne løse et sådant system fuldt ud, skal man have lige så mange ligninger, som man har ukendte funktioner (med deres tilhørende afledede). Den anden ligning i systemet kunne derfor være:

$$x_2'(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t) \tag{17-5}$$

Vi har nu lige så mange ligninger (to), som vi har ukendte funktioner (to), og det er nu muligt at bestemme både $x_1(t)$ og $x_2(t)$.

For overskuelighedens skyld skriver man differentialligningssystemer på matrixform. Systemet ovenfor ser således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{17-6}$$

Ser man bort fra, at det er vektorer og matricer, der opereres med, ligner ligningssystemet noget, vi har set før: $x'(t) = A \cdot x(t)$, som man allerede kunne løse i gymnasiet. Løsningen til denne differentialligning er triviel: $x(t) = c\mathrm{e}^{At}$, hvor c er en arbitrær konstant. Nedenfor finder vi ud af, at løsningen til det tilsvarende system af differentialligninger er sammenlignelig med $x(t) = c\mathrm{e}^{At}$.

Vi løser nu differentialligningssystemet i følgende sætning.

Sætning 17.2 Diagonaliseringsmetoden.

Et lineært differentialligningssystem bestående af n ligninger med i alt n ukendte funktioner er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{17-7}$$

Hvis $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tilhørende (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, er systemets fuldstændige løsning bestemt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{17-8}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er vilkårlige komplekse konstanter:

I sætningen er angivet den fuldstændige komplekse løsningsængde for differentialligningssystemet. Den fuldstændige reelle løsningsængde kan derefter findes som den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde. Hvis alle egenværdierne i systemmatricen $\mathbf{A}$ er reelle, er den fuldstændige reelle løsning umiddelbart givet ved (17.0.8) hvor koefficienterne $c_1,\ c =_2\ \ldots,\ c_n$ er reelle.

Læg mærke til, at det ikke altid er muligt, at finde n lineært uafhængige egenvektorer. Derfor kan man ikke altid bruge sætning 17.2 til løsning af differentialligningssystemer af 1. orden.

Hvis systemmatricen $\mathbf{A}$ i (17.0.7) er symmetrisk, kan der altid findes n lineært uafhængige egenvektorer, og alle egenværdierne er reelle. Derfor er den fuldstændige reelle løsning i det tilfælde umiddelbart givet ved (17.0.8) hvor koefficienterne $c_1,\ c =_2\ \ldots,\ c_n$ er reelle.

Bevis

Vi gætter på, at en løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ er en vektor $\mathbf{v}$ ganget på $\mathrm{e}^{\lambda t}$, hvor λ er en konstant, så $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$. Vi har da den differentierede

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\,. \tag{17-9}$$

Sættes dette udtryk for $\mathbf{x}'(t)$ ind i ligning (17-7) sammen med udtrykket for $\mathbf{x}(t)$ fås:

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0 \tag{17-10}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}$ er forskellig for nul for ethvert $t \in \mathbb{R}$, hvorfor det kan divideres ud. Denne ligning er et egenværdiproblem. λ er en egenværdi til $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ er den tilhørende egenvektor. De kan begge bestemmes. Det er nu lykkedes os at vise at $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$ er én løsning til differentialligningssystemet, når λ er en egenværdi og $\mathbf{v}$ den tilhørende egenvektor til $\mathbf{A}$.

Til at bestemme den fuldstændige løsningsmængde bruges den såkaldte ***diagonaliseringsmetode***:

Vi antager, at $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$ har n lineært uafhængige (reelle eller komplekse) egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ hørende til egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Vi indfører nu den regulære matrix $\mathbf{V}$, som indeholder alle egenvektorerne:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{17-11}$$

Endvidere indføres funktionen $\mathbf{y}$, så $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, således at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t) \tag{17-12}$$

Vi har da, at $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}'(t)$. Indsættes disse udtryk for $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{x}'(t)$ i ligning (17-7), fås

$$\mathbf{V}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) \Leftrightarrow \mathbf{y}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t), \tag{17-13}$$

hvor $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ er en diagonalmatrix med egenværdierne tilhørende $\mathbf{A}$.

Vi har nu ligningen $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t)$, der kan skrives på følgende måde:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{aligned} \tag{17-14}$$

da $\mathbf{\Lambda}$ kun har elementer forskellig fra nul i diagonalen. Dette ligningssystem er ikke koblet: I hver ligning optræder kun én funktion og dens afledede. Derfor kan man løse dem enkeltvis, og den fuldstændige løsningsmængde til hver ligning er $y(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ for alle $c \in \mathbb{C}$. Samlet giver det den fuldstændige løsningsmængde bestående af nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{17-15}$$

Da vi nu har løsningen $\mathbf{y}(t)$ kan vi også finde løsningen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n \,. \end{aligned} \tag{17-16}$$

Vi har nu fundet den fuldstændige komplekse løsningsmængde til ligningssystemet i ligning (17-7) som består af funktionerne $\mathbf{x}(t)$ for alle $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

■

Eksempel 17.3

Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) \end{aligned} \tag{17-17}$$

som på matrixform skrives som

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{17-18}$$

Det kan vises, at $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -2$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, -3)$ (prøv selv!). Derfor er den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet givet ved nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{17-19}$$

Løsningen er fundet ved brug af sætning 17.2. En anden måde at opskrive løsningsmængden på er ved at skille ligningssystemet ad, så

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-2t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-2t} \end{aligned} \tag{17-20}$$

udgør løsningsmængden, hvor $t \in \mathbb{R}$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

17.1 To koblede differentialligninger

Givet et lineært homogent 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter med n ligninger og n ukendte funktioner

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \,. \quad t \in \mathbb{R} \tag{17-21}$$

Hvis systemmatricen $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer, kan systemets reelle løsningsmængde findes ved hjælp af sætning 17.2. Hvis egenværdierne er reelle, kan den reelle løsningsmængde umiddelbart opskrives efter sætningens formel (17.0.8), hvor de de n tilhørende lineært uafhængige egenvektorer er reelle, og de arbitrære konstanter angives som reelle. Hvis systemmatricen har egenværdier som ikke er reelle, kan den reelle løsningsmænde finde2 ved at uddrage den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde. Også i dette tilfælde vil løsningsmængden kunne opskrives som en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystem.

Tilbage har vi særtilfældet, hvor systemmatricen ikke har n lineært uafhængige egenvektorer. Også her vil den reelle løsningsmængde være en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet. Her kan diagonaliseringsmetoden af gode grunde ikke benyttes, og man må bruge andre metoder.

I dette afsnit gennemgår vi de nævnte tre tilfælde for systemer der består af 2 koblede differentialligninger med 2 ukendte funktioner.

|||| **Metode 17.4**

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-22}$$

bestående af 2 ligninger med 2 ukendte funktioner, kan opskrives som

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-23}$$

hvor $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er reelle lineært uafhængige partikulære løsninger og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bestem først egenværdierne til $\mathbf{A}$. For rødderne i det karakteristiske polynomium $\mathbf{A}$ foreligger der tre muligheder:

- **To reelle enkeltrødder.** I så fald har begge egenværdier λ_1 og λ_2 algebraisk multiplicitet 1 og geometrisk multiplicitet 1, og vi kan sætte

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \tag{17-24}$$

  hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egentlige egenvektorer tilhørende λ_1 og λ_2 respektivt.

- **To komplekse rødder.** De to egenværdier λ og $\bar{\lambda}$ er da hinandens konjugerede komplekse tal. Vi bestemmer da $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ved hjælp af metode 17.5.

- **En dobbeltrod.** Her har egenværdien λ algebraisk multiplicitet 2. Hvis den geometriske multiplicitet af λ er 1, bestemmes $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ved hjælp af metode 17.7.

Ved den første mulighed i metode 17.4 med to forskellige reelle egenværdier, kan man udmiddelbart benytte sætning 17.2, idet de arbitrære konstanter vælges som reelle, se eksempel 17.3equation.17.0.17.

Nu følger metoden, der tager sig af tilfældet med to komplekse egenværdier.

|||| Metode 17.5

To lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-25}$$

hvor $\mathbf{A}$ har det komplekse egenværdipar $\lambda = \alpha + \beta i$ og $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}$ og $\bar{\mathbf{v}}$, er

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) - \sin(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\mathrm{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\beta t)\mathrm{Im}(\mathbf{v})\right) \end{aligned} \tag{17-26}$$

Beviset medtages i næste version af denne eNote.

|||| Eksempel 17.6

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{17-27}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde.

Egenværdierne er bestemt til $\lambda = 1 + i$ henholdsvis $\bar{\lambda} = 1 - i$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v} = (-i, 1)$ henholdsvis $\bar{\mathbf{v}} = (i, 1)$. Det ses, at der er to komplekse egenværdier og dertil to komplekse egenvektorer. Med $\lambda = 1 + i$ haves

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\mathrm{Im}(\mathbf{v}) \tag{17-28}$$

Bruges metode 17.5 har vi da de to løsninger:

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^t\left(\cos(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{e}^t\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \tag{17-29}$$

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(\sin(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{e}^t\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{17-30}$$

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet (17-27) er da givet ved følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(c_1\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}\right), \quad t \in \mathbb{R} \tag{17-31}$$

fundet ved hjælp af metode 17.4.

Endelig beskrives metoden der kan bruges, hvis systemmatricen har egenværdien λ med $\mathrm{am}(\lambda) = 2$ og $\mathrm{gm}(\lambda) = 1$, dvs. hvor diagonalisering ikke mulig.

|||| Metode 17.7

Hvis systemmatricen $\mathbf{A}$ til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-32}$$

har en egenværdi λ med algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorrum kun har geometrisk multiplicitet 1, findes to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet af formen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2(t) &= t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b}, \end{aligned} \tag{17-33}$$

hvor $\mathbf{v}$ er egenvektoren tilhørende egenværdien λ, og $\mathbf{b}$ er løsning til nedenstående lineære ligningssystem:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v} \tag{17-34}$$

|||| Bevis

Det er åbenlyst, at den ene løsning til differentialligningssystemet er $\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$. Det svære er at finde endnu en løsning.

Vi gætter på en løsning af formen

$$\mathbf{u}_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b} = \mathrm{e}^{\lambda t}(t\mathbf{v} + \mathbf{b}), \tag{17-35}$$

hvor $\mathbf{v}$ er en egenvektor tilhørende λ. Vi har da

$$\mathbf{u}_2{}'(t) = (\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t\mathrm{e}^{\lambda t})\mathbf{v} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b} = \mathrm{e}^{\lambda t}((1+\lambda t)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b}) \tag{17-36}$$

Vi kontrollerer, om $\mathbf{u}_2(t)$ er en løsning ved at indsætte det i $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2{}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{u}_2(t) \Leftrightarrow \\ (1+\lambda t)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} &= \mathbf{A}(t\mathbf{v} + \mathbf{b}) \Leftrightarrow \\ t(\lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{v} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{17-37}$$

Den første ligning kan nemt omformes til $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, og den ses at være sand, da $\mathbf{v}$ er en egenvektor tilhørende λ. Den anden ligning omformes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}+\lambda\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \mathbf{A}\mathbf{b}-\lambda\mathbf{b} &= \mathbf{v} \Leftrightarrow \\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{b} &= \mathbf{v} \end{aligned} \tag{17-38}$$

Hvis $\mathbf{b}$ opfylder det foreskrevne ligningssystem, vil $\mathbf{u}_2(t)$ også være en løsning til differentialligningssystemet. Vi har nu fundet to løsninger, og vi skal finde ud af, om de er lineært uafhængige. Dette gøres ved et normalt linearitetskriterium: Hvis ligningen $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2=\mathbf{0}$ kun har løsningen $k_1=k_2=0$ er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ lineært uafhængige.

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ k_1\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}+k_2(t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}+\mathbf{b}\mathrm{e}^{\lambda t}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ t(k_2\mathbf{v})+(k_1\mathbf{v}+k_2\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ k_2\mathbf{v}=\mathbf{0} \wedge k_1\mathbf{v}+k_2\mathbf{b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{17-39}$$

Da $\mathbf{v}$ er en egenvektor, er den forskellig fra nulvektoren, og derfor er $k_2=0$ ifølge den første ligning. Den anden ligning er derved blevet reduceret til $k_1\mathbf{v}=\mathbf{0}$, og med samme argument haves $k_1=0$. Derfor er de løsninger lineært uafhængige, og metoden er nu bevist.

■

|||| Eksempel 17.8

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix}16 & -1\\ 4 & 12\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{17-40}$$

Egenværdierne bestemmes for $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix}16-\lambda & -1\\ 4 & 12-\lambda\end{vmatrix} = (16-\lambda)(12-\lambda)+4 \\ &= \lambda^2-28\lambda+196=(\lambda-14)^2=0 \end{aligned} \tag{17-41}$$

Der er altså kun én egenværdi, nemlig $\lambda=14$, selvom det er et 2×2-system. Egenvektorerne bestemmes:

$$\mathbf{A}-14\mathbf{E}=\begin{bmatrix}16-14 & -1\\ 4 & 12-14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{17-42}$$

Man har da egenvektoren $(\frac{1}{2},1)$, eller $\mathbf{v}=(1,2)$. Vi må altså konstatere, at egenværdien λ har algebraisk multiplicitet 2, men at det tilhørende vektorrum har geometrisk multiplicitet 1. For at bestemme to uafhængige løsninger til differentialligningsystemet kan metode 17.7

bruges.

Først løses følgende ligningssystem:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{b}=\mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{17-43}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17-44}$$

Dette giver $\mathbf{b}=(1,1)$, hvis den frie variabel sættes til 1. De to løsninger er da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \mathrm{e}^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2(t) &= t\mathrm{e}^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\mathrm{e}^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{17-45}$$

Ved hjælp af metode 17.4 kan den fuldstændige løsningsmængde bestemmes til at være følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{u}_1(t)+c_2\mathbf{u}_2(t)=c_1\mathrm{e}^{14t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{14t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \tag{17-46}$$

17.2 n-dimensionalt løsningsrum

I det foregående afsnit har vi betragtet koblede systemer bestående af to lineære ligningssystemer med to ukendte funktioner. Løsningsrummet er to-dimensionalt, idet det kan opskrives som en linearkombination af to lineært uafhængige løsninger. Dette kan generaliseres til vilkårlige systemer med $n \geq 2$ koblede lineære differentialligninger med n ukendte funtioner: Løsningsmængden er en linearkombination af netop n lineært uafhængige løsninger. Dette formuleres i generel form i følgende sætning.

|||| Sætning 17.9

Givet det lineære homogene 1. ordens differentialligningssystem med konstante reelle koefficienter

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-47}$$

bestående af n ligninger og med i alt n ukendte funktioner. Den fuldstændige reelle løsningsmængde til systemet er n-dimensionalt kan opskrives ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{u}_n(t), \tag{17-48}$$

hvor $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ er lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet, og $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Herunder er et eksempel med et koblet system af tre differentiallinger, der eksemplificerer sætning 17.9.

|||| Eksempel 17.10 Advanced

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{17-49}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet. Egenværdierne og egenvektorene kan bestemmes og er som følger:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -4 \quad &: \quad \mathbf{v}_1 = (10, 5, 1) \\ \lambda_2 = 1 \quad &: \quad \mathbf{v}_2 = (5, 5, 3) \end{aligned}$$

Desuden har λ_2 algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorrum har geometrisk multiplicitet 1. Fordi $n = 3$ skal vi bruge 3 lineært uafhængige løsninger til at danne den fuldstændige løsningsmængde, som set i sætning 17.9. Egenværdierne betragtes hver for sig:

1) Den første egenværdi, $\lambda_1 = -4$, har både geometrisk og algebraisk multiplicitet lig 1. Det giver netop én løsning

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17-50}$$

2) Den anden egenværdi, $\lambda_2 = 1$, har algebraisk multiplicitet 2, men geometrisk multiplicitet 1. Derfor kan vi bruge metode 17.7 til at finde to løsninger. Først bestemmes $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{17-51}$$

En partikulær løsning til dette ligningssystem er $\mathbf{b} = (0, \frac{1}{2}, 1)$. Med denne viden har vi yderligere to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3(t) &= t\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{b} = t\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17-52}$$

Det er op til læseren at vise, at de tre løsninger er lineært uafhængige.

Ifølge metode 17.9 er den fuldstændige reelle løsningsmængde udgjort af følgende linearkombination for alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) + c_3\mathbf{u}_3(t) \tag{17-53}$$

Dette giver altså

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathrm{e}^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \left(t\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \tag{17-54}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

17.3 Eksistens og entydighed af løsninger

Ifølge struktursætningen 17.9 indeholder den fuldstændige løsningsmængde til et differentialligningssystem med n ligninger n arbitrre konstanter. Hvis man har n ***begyndelsesvrdibetingelser***, s kan konstanterne bestemmes, og vi får da en entydig løsning. Dette formuleres i følgende ***eksistens- og entydighedssætning***.

|||| Sætning 17.11 Eksistens og entydighed afløsninger

Et 1. ordens differentialligningssystem bestående af n ligninger og n ukendte funktioner med konstante koefficienter er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in I\,. \tag{17-55}$$

For ethvert $t_0 \in I$ og ethvert talsæt $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ findes der netop én løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t)\,)$ der opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0\,, \tag{17-56}$$

hvilket vil sige at

$$x_1(t_0) = y_1,\ x_2(t_0) = y_2,\ \ldots,\ x_n(t_0) = y_n. \tag{17-57}$$

Beviset udelades.

|||| Eksempel 17.12

I eksempel 17.3equation.17.0.17 fandt vi den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-58}$$

nemlig

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{17-59}$$

Vi ønsker nu at bestemme den entydige løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (6, 6)$. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 e^0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{17-60}$$

Med sædvanlig GaussJordan-elimination fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{17-61}$$

Man får altså løsningen $(c_1, c_2) = (6, 0)$, og den entydige og betingede løsning er derfor

$$\mathbf{x}(t) = 6e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{17-62}$$

hvilket er det samme som at

$$x_1(t) = 6\mathrm{e}^{3t} \quad x_2(t) = 6\mathrm{e}^{3t}\,. \tag{17-63}$$

I dette særtilfælde er de to funktioner altså identiske.

17.4 Omformning af lineære *n*-te ordens homogene differentialligninger til et 1. ordens differentialligningssystem

Med lidt snilde er det muligt at omforme en vilkårlig homogen n-te ordens differentialligning med konstante koefficienter til et differentialligningssystem, som kan løses ved hjælp af denne note.

|||| Metode 17.13

En n-te ordens lineær differentialligning,

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{17-64}$$

for $t \in \mathbb{R}$, kan omformes til et 1. ordens differentialligningssystem, og systemet vil se således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{17-65}$$

og $x_1(t) = x(t)$.

Beviset for denne omskrivning er simpelt og giver god forståelse for omformningen.

|||| Bevis

Lad der være givet en n-te ordens differentialligning som i ligning (17-64). Vi indfører n funktioner på denne måde:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) &&= x'(t) \\ x_3(t) &= x_2'(t) &&= x''(t) \\ &\vdots && \vdots \\ x_{n-1}(t) &= x_{n-2}'(t) &&= x^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= x_{n-1}'(t) &&= x^{(n-1)}(t) \end{aligned} \tag{17-66}$$

Disse nye udtryk indsættes i differentialligningen (17-64):

$$x_n'(t) + a_{n-1}x_n(t) + a_{n-2}x_{n-1}(t) + \ldots + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = 0 \tag{17-67}$$

Denne ligning kan sammen nu med ligningerne (17-66) skrives op på matrixform.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{17-68}$$

Metoden er nu bevist.

■

|||| Eksempel 17.14

Givet en lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter:

$$x'''(t) - 4x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17-69}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde. Derfor indføres funktionerne

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) = x'(t) \\ x_3(t) &= x_2'(t) = x''(t) \end{aligned} \tag{17-70}$$

På denne måde kan vi omskrive differentialligningen til

$$x_3'(t) - 4x_3(t) - 7x_2(t) + 10x_1(t) = 0 \tag{17-71}$$

Og vi kan da samle de tre sidste ligninger i et ligningssystem.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= -10x_1(t) + 7x_2(t) + 4x_3(t) \end{aligned} \tag{17-72}$$

Det skrives på matrixform på denne måde:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{17-73}$$

Egenværdierne bestemmes til at være $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 5$. Den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet er ifølge sætning 17.2 givet ved følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{5t}\mathbf{v}_3, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17-74}$$

hvor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er respektive egenvektorer.

Vi skal imidlertid kun bruge løsningsmængden til $x_1(t) = x(t)$, hvorfor den tages ud af systemet. Desuden indfører vi nu tre nye arbitrære konstanter $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, der skal gøre det ud for produkterne mellem c'erne og egenvektorernes førstekoordinat. Resultatet bliver således

$$x(t) = x_1(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{t} + k_3 e^{5t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{17-75}$$

Dette udgør den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen (17-69). Hvis førstekoordinaten i $\mathbf{v}_1$ er 0 sættes $k_1 = 0$, i modsat fald kan k_1 være et vilkårligt reelt tal. På samme måde med k_2 og k_3.