eNote 16

Førsteordens lineære differentialligninger

I denne eNote gives først en kort introduktion til differentialligninger i almindelighed, hvorefter hovedemnet er en særlig type af differentialligninger, de såkaldte 1. ordens lineære differentialligninger. eNoten bygger på kendskab til specielle funktioner, differential- og integralregning samt lineære afbildninger.

Version 23.10.18 *ved Karsten Schmidt.*

16.1 Hvad er en differentialligning?

En *differentialligning* er en ligning, hvori der optræder én eller flere ubekendte *funktioner* sammen med en eller flere af deres afledede. I denne eNote betragter vi kun differentialligningerne der indeholder én ubekendt funktion. Differentialligninger opstår naturligt ved modellering af fysiske, mekaniske, økonomiske, kemiske og mangfoldige andre problemer, hvorfor det er et vigtigt ingeniørmæssigt emne.

Man siger at en differentialligning har *orden* n hvis den indeholder den n-te afledede af den ukendte funktion, men ingen afledede af orden højere end n. Den ukendte funktion betegnes i denne eNote med x eller med $x(t)$ hvis navnet på den uafhængige variabel t er vigtigt i sammenhængen.

Et eksempel på en differentialligning er

$$x'''(t) - 2x'(t) + x(t) = t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-1}$$

Differentialligningen har *orden* 3, da det højeste antal gange den ukendte funktion x er differentieret i ligningen, er 3. En *løsning* til differentialligningen er en funktion x_0 som indsat i ligningen gør den sand. Hvis vi for eksempel skal undersøge om funktionen

$$x_0(t) = \mathrm{e}^t + t + 2\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

er en løsning til (16-1), gør vi prøve, dvs. indsætter x_0 i stedet for x i ligningen. Idet der gælder

$$\begin{aligned} x_0'''(t) - 2x_0'(t) + x_0(t) &= (\mathrm{e}^t + t + 2)''' - 2(\mathrm{e}^t + t + 2)' + ((\mathrm{e}^t + t + 2)) \\ &= \mathrm{e}^t - 2(\mathrm{e}^t + 1) + \mathrm{e}^t + t + 2 \\ &= t \end{aligned}$$

er x_0 en løsning.

Denne eNote handler om en vigtig type af førsteordens differentialligninger, de såkaldte *lineære*. For at kunne undersøge dem præcist tager vi udgangspunkt i deres standard opskrivningsform.

16.2 Introduktion til 1. ordens lineære differentialligninger

|||| Definition 16.1

Ved en førsteordens *lineær* differentialligning forstås en differentialligning der kan bringes på standardformen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)\,, \quad t \in I \tag{16-2}$$

hvor I er åbent interval i $\mathbb{R}$, og p og q er (kendte) kontinuerte funktioner defineret på I.

Differentialligningen kaldes *homogen* hvis $q(t) = 0$ for alle t. I modsat fald kaldes den *inhomogen*.

|||| Eksempel 16.2 Standardform

1. ordens differentialligningen

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-3}$$

ses umiddelbart at være på standardformen (16.2.2) med $p(t) = 2$ og $q(t) = 30 + 8t\,, \quad t \in \mathbb{R}$. Den er derfor lineær.

|||| Eksempel 16.3 Standardform

Lad I være et åbent interval i $\mathbb{R}$. Betragt 1. ordens differentialligningen

$$t \cdot x'(t) + 2x(t) - 8t^2 = -10\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-4}$$

For at bringe den på standardform må vi først lægge $8t^2$ til på begge sider af lighedstegnet, idet der på venstresiden kun må optræde led med den ukendte funktion $x(t)$. Derefter dividerer vi med t på begge sider af lighedstegnet, da $x(t)$ ikke må have en koefficient forskellig fra 1. For at undgå division med 0, må vi beslutte os for om vi skal forudsætte t større eller mindre nul, lad os vælge det første:

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0\,. \tag{16-5}$$

Hermed er differentialligningen på standardform med $p(t) = \frac{2}{t}$ og $q(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0$.

|||| Opgave 16.4 Standardform

Gør rede for at 1. ordens differentialligningen

$$x'(t) + \frac{1}{2}t^2 = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ikke er homogen.

|||| Opgave 16.5 Flere løsninger

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Vis at uanset om $c = 1$, $c = 2$ eller $c = 3$, så er funktionen

$$x_0(t) = 13 + 4t + ce^{-2t}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

en løsning.

Af opgave 16.5 fremgår det at en differentialligning meget vel kan have flere løsninger. Vi skal i det følgende undersøge spørgsmålet om antallet af løsninger nærmere. For at forstå hvad der mere præcist ligger i at en 1. ordens differentialligning er lineær, og hvad det betyder for dens løsningsmængde, får vi brug for den følgende hjælpesætning.

|||| Hjælpesætning 16.6

Lad p være en kontinuert funktion defineret på et åbent interval I i $\mathbb{R}$. Så gælder at afbildningen $f : C^1(I) \to C^0(I)$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) + p(t)x(t) \tag{16-6}$$

er lineær.

|||| Bevis

Vi skal vise at f opfylder de to linearitetskrav L_1 og L_2. Lad $x_1, x_2 \in C^1(I)$ (dvs. de to funktioner er vilkårlige differentiable funktioner med kontinuerte afledede på I), og lad $k \in \mathbb{R}$. At f opfylder L_1 fremgår af

$$\begin{aligned} f(x_1(t) + x_2(t)) &= (x_1(t) + x_2(t))' + p(t)(x_1(t) + x_2(t)) \\ &= x_1'(t) + x_2'(t) + p(t)(x_1(t) + p(t)x_2(t) \\ &= (x_1'(t) + p(t)x_1(t)) + (x_2'(t) + p(t)x_2(t)) \\ &= f(x_1(t)) + f(x_2(t))\,. \end{aligned}$$

At f opfylder L_2 fremgår af

$$\begin{aligned} f(kx_1(t)) &= (kx_1'(t)) + p(t)(kx_1(t)) = k(x_1'(t) + p(t)x_1(t)) \\ &= kf(x_1(t))\,. \end{aligned}$$

Hermed at beviset fuldført.

■

Fra hjælpesætning 16.6 kan vi uddrage tre vigtige egenskaber for løsningsmængden for 1. ordens lineære differentialligninger. Forinden indfører vi nogle bekvemme betegnelser for de løsningsmængder vi skal behandle.

L_{inhom} betegner samtlige løsninger for en given inhomogen differentialligning. De omtales kort som *løsningsmængden* eller den *fuldstændige løsning*.

L_{hom} betegner løsningsmængden for den til en inhomogen differentialligning hørende homogene differentialligning (hvor højresiden $q(t)$ er erstattet med 0).

|||| Sætning 16.7 Tre egenskaber

For en 1. ordens lineær differentialligning $x'(t) + p(t)x(t) = q(t)\,,\ t \in I$ gælder:

1. Hvis differentialligningen er homogen (dvs. $q(t)$ er 0-funktionen), så er løsningsmængden et underrum i $C^1(I)$.

2. *Struktursætningen*: Hvis differentialligningen er inhomogen, kan løsningsmængden L_{inhom} skrives på formen

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} \tag{16-7}$$

   hvor $x_0(t)$ er en *partikulær løsning* til den inhomogene differentialligning, og L_{hom} er løsningsmængden til den tilsvarende homogene differentialligning.

3. *Superpositionsprincippet*: Hvis $x_1(t)$ er en løsning når differenttialligningens højreside erstattes af funktionen $q_1(t)$, og $x_2(t)$ er en løsning når højresiden erstattes af funktionen $q_2(t)$, så er $x_1(t) + x_2(t)$ en løsning når højresiden erstattes af funktionen $q_1(t) + q_2(t)$.

|||| Bevis

Vi betragter afbildningen $f : C^1(I) \to C^0(I)$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) + p(t)x(t)\,. \tag{16-8}$$

Den er ifølge hjælpesætning (16.6) lineær. Derfor gælder:

1. L_{hom} er identisk med $ker(f)$. Da kernen for enhver lineær afbildning er et underrum i defintionsrummet, er L_{hom} et underrum i $C^1(I)$.

2. Da ligningen $f(x(t)) = x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$ er lineær, følger struktursætningen her direkte af den generelle struktursætning for lineære ligninger (se eNote 12, sætning 12.14).

3. Superpositionsprincippet er en følge af at f opfylder linearitetbetingelsen L_1. Antag nemlig at $f(x_1(t)) = q_1(t)$ og $f(x_2(t)) = q_2(t)$. Så gælder

$$f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t)) = q_1(t) + q_2(t)\,.$$

Hermed er beviset fuldført.

■

Når vi kalder en 1. ordens differentialligning på formen (16.2.2) for lineær, hænger det som vist snævert sammen med at dens venstreside repræsenterer en linæer afbildning, og at dens løsningsmængde derfor har de unikke egenskaber i sætning . 16.7 I det følgende eksempel jonglerer vi med egenskaberne ved på forskellig vis at afgøre at en given differentialligning ikke er lineær.

|||| Eksempel 16.8 1. ordens differentialligning som ikke er lineær

Vi betragter en 1. ordens differentialligning

$$x'(t) - (x(t))^2 = q(t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-9}$$

hvor vi på sædvanlig vis har isoleret de led der indeholder den ukendte funktion på venstresiden. Venstresiden repræsenterer afbildningen $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x(t)) = x'(t) - (x(t))^2\,. \tag{16-10}$$

Vi vil her vise at man på forskellige måder kan demonstrere at differentialligningen ikke er lineær.

1. Det er oplagt at differentialligningen ikke kan bringes på standardformen (16.2.2) da den ukendte funktion optræder i anden potens. Differentialligningen er derfor ikke lineær.

2. Løsningsmængden til den tilhørende homogene ligning er ikke et underrum. Den opfylder fx ikke stabilitetskravet vedrørende multiplikation med skalar hvilket vi kan

vise således:

Funktionen $x_0(t) = -\dfrac{1}{t}$ er en løsning til den homogene ligning idet

$$x_0'(t) - (x_0(t))^2 = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} = 0\,.$$

Men det er $2 \cdot x_0(t) = -\dfrac{2}{t}$ ikke, idet

$$(2 \cdot x_0(t))' - (2 \cdot x_0(t))^2 = \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t^2} = -\frac{2}{t^2} \neq 0\,.$$

Differentialligningen er derfor ikke linæer.

3. Løsningsmængden opfylder ikke superpositionsprincippet. Vi ser fx at

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{t}\right) + f\left(\frac{1}{t}\right) &= 0 + \left(-\frac{2}{t^2}\right) = -\frac{2}{t^2}\,, \quad \text{mens} \\ f\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) &= f(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Differentialligningen er derfor ikke linæer.

4. Til sidst viser vi at f ikke opfylder linearitetsbetingelserne. For at vise det behøver vi blot afprøve L_2, fx med $k = 2$. Vi udregner de to sider i L_2 :

$$\begin{aligned} f(2x(t)) &= (2x(t))' - (2x(t))^2 = 2x'(t) - 4(x(t))^2 \\ 2f(x(t)) &= 2(x'(t) - (x(t))^2) = 2x'(t) - 2(x(t))^2\,. \end{aligned}$$

Ved subtraktion af de to ligninger fås:

$$f(2x(t)) - 2f(x(t)) = -2(x(t))^2$$

hvor højresiden kun er 0-funktion når $x(t)$ er 0-funktionen. Da L_2 skal gælde for alle $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$, er L_2 ikke opfyldt. Differentialligningen er derfor ikke lineær.

Det følger af struktursætningen at de homogene differentialligninger spiller en helt speciel rolle for lineære differentialligninger. Derfor tager vi dem op til særskilt behandling i næste afsnit.

16.3 Homogene 1. ordens lineære differentialligninger

Vi opstiller i det følgende en løsningsformel for homogene 1. ordens lineære differentialligninger.

|||| Sætning 16.9 Løsning af den homogene ligning

Lad $p(t)$ være en kontinuert funktion defineret på et åbent reelt interval I, og lad $P(t)$ være en vilkårlig stamfunktion til $p(t)$.

Den fuldstændige løsning for den homogene 1. ordens lineære differentialligning

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0\,,\ t \in I\,. \tag{16-11}$$

er da givet ved

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{-P(t)}\,,\ t \in I \tag{16-12}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

|||| Bevis

Sætningen følger af det følgende ræsonnement:

$x'(t) + p(t)x(t) = 0$ (gang med $\mathrm{e}^{P(t)}$ på begge sider)

$\Leftrightarrow\ x'(t)\mathrm{e}^{P(t)} + x(t)p(t)\mathrm{e}^{P(t)} = 0$ (brug kædereglen baglæns)

$\Leftrightarrow\ x'(t)\mathrm{e}^{P(t)} + x(t)\left(\mathrm{e}^{P(t)}\right)' = 0$ (brug produktreglen baglæns)

$\Leftrightarrow\ \left(x(t)\mathrm{e}^{P(t)}\right)' = 0$ (integrér på begge sider)

$\Leftrightarrow\ x(t)\mathrm{e}^{P(t)} = c$ (gang med $\mathrm{e}^{-P(t)}$ på begge sider)

$\Leftrightarrow\ x(t) = c\mathrm{e}^{-P(t)}$.

I de sidste to linjer står c for et vilkårligt reelt tal.

Hermed er beviset gennemført.

■

Vi ved at løsningsmængden er et underrum i $C^1(I)$. Af formlen (16.3.12) fremgår det dels at underrummet er 1-dimensionalt, dels at funktionen $\mathrm{e}^{-P(t)}$ er en basis for løsningsmængden.

|||| Opgave 16.10

I sætning 16.9 benyttes en vilkårlig stamfunktion $P(t)$ til $p(t)$. Gør rede for at det ikke har betydning for løsningsmængden, hvilken stamfunktion man vælger at bruge, når man benytter sætningen.

|||| Eksempel 16.11 Løsning af homogen ligning

Der er givet en homogen 1. ordens lineær differentialligning ved

$$x'(t) + \cos(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-13}$$

Vi ser at kvotientfunktionen er $p(t) = \cos(t)$. En stamfunktion til $p(t)$ er dermed $P(t) = \sin(t)$. Herefter kan den fuldstændige løsning opskrives

$$x(t) = c\mathrm{e}^{-P(t)} = c\mathrm{e}^{-\sin(t)}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{16-14}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

16.4 Inhomogene ligninger løst med gættemetoden

Nu hvor vi ved hvordan løsningsmængden for homogene 1. ordens lineære differentialligner kan findes, er det på tide at kigge på de inhomogene. Hvis man allerede kender eller kan gætte en partikulær læsning til den inhomogene ligning, er det oplagt at udnytte struktursætningen, se 16.7. Det demonstrerer vi med de følgende eksamenpler.

|||| Eksempel 16.12 Løsning med gæt og struktursætningen

En inhomogen 1. ordens lineær differentialligning er givet ved

$$x'(t) + tx(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-15}$$

Det ses nemt at $x_0(t) = 1$ er en partikulær løsning. Herefter løser vi den tilsvarende homogene differentialligning

$$x'(t) + tx(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-16}$$

Med brug af betegnelser fra sætning 16.9 har vi $p(t) = t$ som har stamfunktionen

$$P(t) = \frac{1}{2}t^2 .$$

Den fuldstændige løsning består derfor af følgende funktioner hvor c er et vilkårligt reelt tal:

$$x(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R} . \tag{16-17}$$

Kort sagt:

$$L_{hom} = \left\{ ce^{-\frac{1}{2}t^2} , \ t \in \mathbb{R} \ \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\} . \tag{16-18}$$

Vi kan nu opstille den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning ved hjælp af struktursætningen:

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{ 1 + ce^{-\frac{1}{2}t^2} , \ t \in \mathbb{R} \ \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\} .$$

|||| Eksempel 16.13 Løsning med gæt og struktursætningen

En inhomogen 1. ordens lineær differentialligning er givet ved

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t, \quad t \in \mathbb{R} . \tag{16-19}$$

Lad os først forsøge at gætte en partikulær løsning. Da højresiden er et 1. grads polynomium kan man med den givne venstreside, hvor der kun skal differentieres og ganges med 2, formode at et 1. grads polynomium kan være en løsning. Vi forsøger derfor at indsætte et vilkårligt 1. grads polynomium $x_0(t) = b + at$ i differentialligningens venstreside:

$$x_0'(t) + 2x_0(t) = (b + at)' + 2(b + at) = a + 2b + 2at .$$

Vi sammenligner det opnåede udtryk med den givne højreside:

$$a + 2b + 2at = 30 + 8t$$

som er opfyldt for alle $t \in \mathbb{R}$ netop når

$$a + 2b = 30 \ \text{ og } \ 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4 \ \text{ og } \ b = 13 .$$

Vi har dermed fundet en partikulær løsning

$$x_0(t) = 13 + 4t , \ t \in \mathbb{R} .$$

Vi løser herefter den tilsvarende homogene differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} . \tag{16-20}$$

Med brug af betegnelser fra sætning 16.9 har vi $p(t) = 2$ som har stamfunktionen $P(t) = 2t$. Den fuldstændige løsning består derfor af følgende funktioner hvor c er et vilkårligt reelt tal:

$$x(t) = ce^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-21}$$

Kort sagt:

$$L_{hom} = \left\{ ce^{-2t}, \ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{16-22}$$

Det er nu muligt at opstille den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning ved hjælp af struktursætningen:

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{ 13 + 4t + ce^{-2t}, \ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

|||| Eksempel 16.14 Løsning med gæt og struktursætningen

En inhomogen 1. ordens lineær differentialligning er givet ved

$$x'(t) + x(t) = 1 + \sin(2t), \quad t \geq 0. \tag{16-23}$$

Lad os først forsøge at gætte en partikulær løsning. Da højresiden består af en konstant plus en sinusfunktion med vinkelfrekvensen 2, er det oplagt at gætte på en løsning af typen

$$x(t) = k + a\cos(2t) + b\sin(2t).$$

Ved indsættelse af denne i differentialligningen fås:

$$\begin{gathered} -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t) + k + a\cos(2t) + b\sin(2t) = 1 + \sin(2t) \\ \Leftrightarrow (2b + a)\cos(2t) + (b - 2a - 1)\sin(2t) + (k - 1)\,1 = 0. \end{gathered}$$

Da sættet $(\cos(2t), \sin(2t), 1)$ er lineært uafhængigt, er denne ligning opfyldt netop når

$$2b + a = 0, \ b - 2a - 1 = 0 \ \text{og} \ k = 1 \ \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}, \ b = \frac{1}{5} \ \text{og} \ k = 1.$$

Vi har hermed fundet en partikulær løsning

$$x_0(t) = 1 - \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Da den tilsvarende homogene differentialligning

$$x'(t) + x(t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{16-24}$$

klart har løsningsmængden

$$x(t) = ce^{-t}, \quad t \geq 0\,, \tag{16-25}$$

får vi den fuldstændige løsningsmængde til den givne inhomogene differentialligning ved hjælp af struktursætningen:

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{\, 1 - \tfrac{2}{5}\cos(2t) + \tfrac{1}{5}\sin(2t) + ce^{-t}\,,\ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \,\right\}\,.$$

Som demonstreret i de tre foregående eksempler er det oplagt at bruge gættemetoden i de inhomogene tilfælde hvor man allerede kender en partikulær løsning eller nemt kan finde én. Det kræver blot at man kan finde en stamfunktion $P(t)$ til koefficientfunktionen $p(t)$.

Har man derimod ikke umiddelbar adgang til en partikulær løsning, må man i stedet benytte den generelle løsningsformel som sine steder går under navnet *Panserformlen*. Her slipper man for alt gætteri, til gengæld skal man finde to stamfunktioner, den ene er $P(t)$ som ovenfor, mens den anden oftest er noget vanskeligere (om ikke umulig) at finde idet man skal integrere et produkt af funktioner. I det følgende afsnit opstiller vi den generelle løsningsformel og diskuterer de nævnte problemer.

16.5 Den generelle løsningsformel

Vi betragter nu den generelle 1. ordens lineære differentialligning på standardformen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-26}$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning ved hjælp af den følgende generelle formel, som populært kaldes Panserformlen.

|||| Sætning 16.15 Panserformlen

Lad $p(t)$ og $q(t)$ være kontinuerte funktioner på et åbent reelt interval I , og lad $P(t)$ være en vilkårlig stamfunktion til $p(t)$. Differentialligningen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I \tag{16-27}$$

har da løsningsmængden

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c\mathrm{e}^{-P(t)}, \quad t \in I \tag{16-28}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

|||| Bevis

Det andet led i løsningsformlen (16-28) identificerer vi som L_{hom} . Hvis vi kan vise at det første led er en partikulær løsning til differentialligningen, så følger det af struktursætningen at vi med løsningsformlen har fundet den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Først må vi naturligvis stille os det spørgsmål om det ubestemte integral der indgår i løsningsformen, overhovedet eksisterer. Det gør det! Se detaljeret begrundelse for det i beviset for eksistens- og entydighedssætningen, sætning 16.22 . At det første led

$$x_0(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt$$

er en partikulær løsning, viser vi ved at gøre prøve: Vi indsætter det i differentialligningens venstreside, og ser at resultatet er lig med den givne højreside.

$$\begin{aligned} x_0'(t) + p(t)x_0(t) &= \left(\mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t)\,\mathrm{d}t\right)' + p(t)\,\mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -p(t)\mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-P(t)}\mathrm{e}^{P(t)} q(t) + p(t)\mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt \\ &= q(t)\,. \end{aligned}$$

Hermed er beviset gennemført.

■

Sætter man i $q(t) = 0$ i Panserformlen (16.5.28), forsvinder det første led, tilbage er det andet led som er formlen (16.3.12) for homogene ligninger. Derfor er Panserformlen en "'generel formel"' der både dækker det homogene og det inhomogene tilfælde.

|||| Opgave 16.16

I Panserformlen indgår det ubestemte $\int e^{P(t)} q(t) dt$, som står for en vilkårlig stamfunktion til $e^{P(t)} q(t)$. Gør rede for at det ikke har betydning for løsningsmængden, hvilken stamfunktion man vælger at bruge, når man benytter formlen.

Vi tager nu et par eksempler med brug af Panserformlen. Da den indeholder et ubestemt integral over et produkt af funktioner, får man ofte brug for *partiel integration*, hvilket det andet eksempel demonstrerer.

|||| Eksempel 16.17 Løsning med Panserformlen

Givet er differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t} x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0 \,. \tag{16-29}$$

Med betegnelserne i Panserformlen har vi $p(t) = \frac{2}{t}$ og $q(t) = 8t - \frac{10}{t}$. En stamfunktion til $p(t)$ er givet ved:

$$P(t) = 2 \ln t \,. \tag{16-30}$$

Vi har da

$$\mathrm{e}^{-P(t)} = \mathrm{e}^{-2 \ln t} = \mathrm{e}^{\ln(t^{-2})} = t^{-2} = \frac{1}{t^2} \,. \tag{16-31}$$

Af dette følger, at $\mathrm{e}^{P(t)} = t^2$. Nu bruges Panserformlen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) \, \mathrm{d}t + c\mathrm{e}^{-P(t)} \\ &= \frac{1}{t^2} \int t^2 \left(8t - \frac{10}{t} \right) \, \mathrm{d}t + c\frac{1}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \int (8t^3 - 10t) \, \mathrm{d}t + c\frac{1}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(2t^4 - 5t^2 + c \right) \\ x(t) &= 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2} \,, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{16-32}$$

Den fuldstændige løsning består af disse funktioner hvor c er et vilårligt reelt tal. Kort sagt:

$$L_{inhom} = \left\{ \, x(t) = 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2} \,, \; t > 0 \; \middle| \; c \in \mathbb{R} \right\} . \tag{16-33}$$

|||| Eksempel 16.18 Løsning med Panserformlen

Vi skal løse differentialligningen

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = t^2 \sin(2t), \quad t > 0\,. \tag{16-34}$$

Med betegnelserne i Panserformlen har vi $p(t) = -\frac{1}{t}$ og $q(t) = t^2 \sin(2t)$. En stamfunktion til $p(t)$ er givet ved:

$$P(t) = -\ln t\,. \tag{16-35}$$

Vi har da

$$\mathrm{e}^{-P(t)} = \mathrm{e}^{\ln t} = t \quad \text{og} \quad \mathrm{e}^{P(t)} = \mathrm{e}^{-\ln t} = (\mathrm{e}^{\ln t})^{-1} = \frac{1}{t}\,. \tag{16-36}$$

Nu bruges Panserformlen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t)\,\mathrm{d}t + c\mathrm{e}^{-P(t)} \\ &= t \int \frac{1}{t} t^2 \sin(2t)\,\mathrm{d}t + ct \\ &= t \int t \sin(2t)\,\mathrm{d}t + ct\,. \end{aligned}$$

Vi laver nu en mellemregning hvor vi bruger partiel integration til at finde stamfunktionen.

$$\begin{aligned} \int t \sin(2t) dt &= -\frac{1}{2} t \cos(2t) - \int -\frac{1}{2} \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{2} \int \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(2t)\,. \end{aligned}$$

Og vender tilbage til udregningen

$$\begin{aligned} x(t) &= t \int t \sin(2t)\,\mathrm{d}t + ct \\ &= t\left(-\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(2t)\right) + ct \\ x(t) &= -\frac{1}{2} t^2 \cos(2t) + \frac{1}{4} t \sin(2t) + ct \quad t > 0\,. \end{aligned}$$

Den fuldstændige løsning består af disse funktioner hvor c er et vilårligt reelt tal. Kort sagt:

$$L_{inhom} = \left\{\, x(t) = -\tfrac{1}{2} t^2 \cos(2t) + \tfrac{1}{4} t \sin(2t) + ct\,,\ t > 0 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \,\right\}. \tag{16-37}$$

Indtil nu har vi beskæftiget os med den fuldstændige løsning til differentialligningen. Ofte er man interesseret i at gå et skridt videre og finde en bestemt løsning som i en given værdi af t antager en ønsket funktionsværdi, et såkaldt begyndelsesværdiproblem. Det behandler vi i næste afsnit.

16.6 Begyndelsesværdiproblemer

Vi ser på en 1. ordens lineær differentialligning på standardformen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I. \tag{16-38}$$

Hvis vi skal bruge en løsning til differentialligningen som i en bestemt værdi af t antager en ønsket funktionsværdi, opstår spørgsmålene: 1) Findes der overhoveddet en løsning som opfylder det ønskede og 2) Hvis ja, hvor mange løsninger er der så? Inden vi besvarer spørgsmålet generelt, ser vi på et par eksempler.

|||| Eksempel 16.19 Et begyndelsesværdiproblem

I eksempel 16.12 fandt vi den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'(t) + tx(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16-39}$$

nemlig

$$x(t) = 1 + ce^{-\frac{1}{2}t^2}, \; t \in \mathbb{R}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

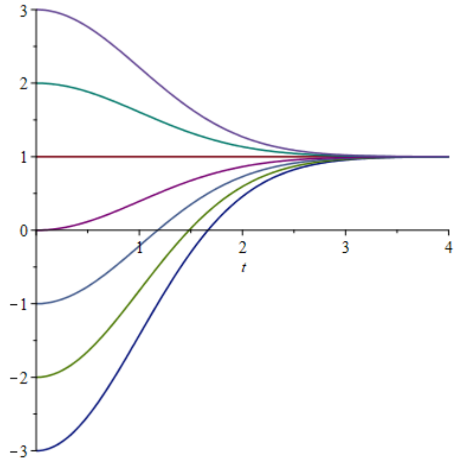
Vi vil nu finde den løsning $x_0(t)$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_0(0) = 3$. Det sker ved at indsætte begyndelsesværdien i den fuldstændige løsning, hvorved c bestemmes:

$$x_0(0) = 1 + ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} = 1 + c = 3 \Leftrightarrow \; c = 2. \tag{16-40}$$

Derfor er den betingede løsningsfunktion til differentialligningen givet ved

$$x_0(t) = 1 + 2e^{-\frac{1}{2}t^2}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{16-41}$$

Figuren nedenfor viser graferne for de syv løsninger som svarer til begyndelsesværdibetingelserne $x_0(0) = b$ hvor $b \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Den løsning vi netop fandt, er den øverste. De øvrige findes på samme måde.



|||| Eksempel 16.20 Et begyndelsesværdiproblem

I eksempel 16.17 fandt vi den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0, \tag{16-42}$$

nemlig

$$x(t) = 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2}, \quad t > 0$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

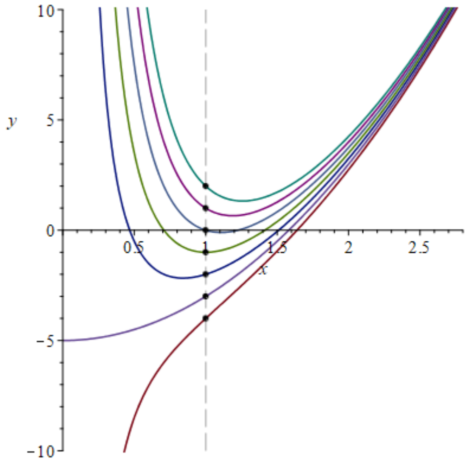
Vi vil nu finde den løsning $x_0(t)$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_0(1) = 2$. Det sker ved at indsætte begyndelsesværdien i den fuldstændige løsning, hvorved c bestemmes:

$$x_0(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 + \frac{c}{1^2} 2 - 5 + c = 2 \;\Leftrightarrow\; c = 5\,. \tag{16-43}$$

Derfor er den betingede løsningsfunktion til differentialligningen givet ved

$$x_0(t) = 2t^2 - 5 + \frac{5}{t^2}\,, \quad t > 0\,. \tag{16-44}$$

Figuren nedenfor viser graferne for de syv løsninger som svarer til begyndelsesværdibetingelserne $x_0(0) = b$ hvor $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Den løsning vi netop fandt, er den øverste. De øvrige findes på samme måde.



|||| Eksempel 16.21 Det stationære svar

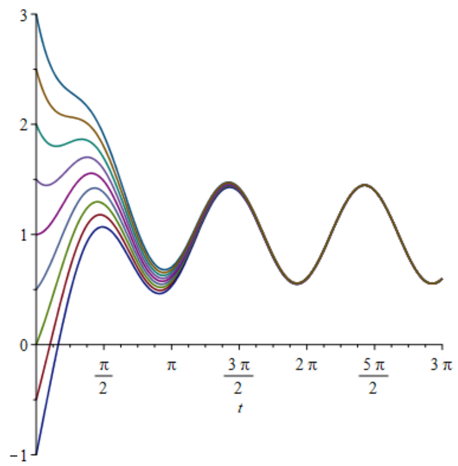
I eksempel 16.14 fandt vi den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'(t) + x(t) = 1 + \sin(2t), \quad t \geq 0 \tag{16-45}$$

nemlig

$$x(t) = 1 - \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t) + ce^{-t}, \quad t \geq 0\,. \tag{16-46}$$

Vi viser her en række løsninger med begyndelsesværdier fra -1 til 3 for $t = 0$:



Figuren antyder at alle løsninger nærmer sig en periodisk svingning når $t \to \infty$. At dette er tilfældet ses af differentialligningens løsningsmængde hvor det fjerde led ce^{-t} uanset valg af

c er forsvindende på grund af den negative eksponent. De første tre led udgør *det stationære svar*.

I de tre foregående eksempler havde vi ikke problemer med at finde en løsning på differentialligningen som opfyldte en given begyndelsesværdibetingelse. Faktisk så vi at der for hver af de betragtede begyndelsesværdibetingelser fandtes netop én løsning som opfyldte den. At dette gælder helt generelt, viser vi i den følgende sætning.

|||| Sætning 16.22 Eksistens og entydighed af løsninger

Givet differentialligningen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I \tag{16-47}$$

hvor I er et åbent interval og $p(t)$ og $q(t)$ er kontinuerte funktioner på I. Da gælder:

Til ethvert talsæt (t_0, b) findes der netop én (partikulær) løsning $x_0(t)$ til differentialligningen som opfylder *begyndelsesværdibetingelsen*

$$x_0(t_0) = b\,. \tag{16-48}$$

|||| Bevis

Vi har fra sætning 16.15 at løsningsmængden til differentialligningen (16-47) er givet ved

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c\mathrm{e}^{-P(t)} \tag{16-49}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

Lad os først undersøge det ubestemte integral der indgår i formlen. Findes det? Det svarer til at spørge: Findes der en stamfunktion til den funktion som står under integrationstegnet. Vi må starte med $p(t)$. Da den er kontinuert, har den en stamfunktion som vi kalder $P(t)$. Som stamfunktion er $P(t)$ differentiabel og dermed kontinuert. Da også eksponentialfunktionen er kontinuert, er den sammensatte funktion $\mathrm{e}^{P(t)}$ kontinuert. Endelig, da $q(t)$ er kontinuert, er produktet $\mathrm{e}^{P(t)}q(t)$ kontinuert.

Hermed er det vist at funktionen under integrationstegnet er kontinuert. Derfor har den en stamfunktion. Ja, uendeligt mange stamfunktioner, som kun adskiller sig fra hinanden med en konstant. Vi vælger en vilkårlig af dem og kalder den $F(t)$. Vi kan nu reformulere løsningsformlen som

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)}F(t) + c\mathrm{e}^{-P(t)} \tag{16-50}$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal. Vi indsætter nu begyndelsesværdibetingelsen:

$$x(t_0) = \mathrm{e}^{-P(t_0)}F(t_0) + c\mathrm{e}^{-P(t_0)} = b \;\Leftrightarrow\; c = F(t_0) + b\mathrm{e}^{-P(t_0)}$$

hvor vi først gangede med $\mathrm{e}^{P(t_0)}$ på begge sider af lighedstegnet og derefter isolerede c. I den samlede løsningsmængde findes der altså netop én løsning der opfylder den givne begyndelsesværdi betingelse, nemlig den der fremkommer når vi i (16.6.50) indsætter den fundne værdi af c.

Hermed er beviset gennemført.

■

|||| Opgave 16.23

Lad os igen betragte den lineære afbildning $f : C^1(I) \to C^0(I)$ som repræsenterer venstresiden i en 1. ordens lineære differentialligning. Vi ved at $ker(f)$ er éndimensional og har basisvektoren $\mathrm{e}^{-P(t)}$. Men hvad er så billedrummet for f?

$$f(x(t)) = x'(t) + p(t)x(t) \tag{16-51}$$

Vi afslutter dette afsnit med et eksempel der viser hvordan det er muligt at "'gå baglæns"' fra en given løsningsmængde til den differentialligning den løser.

|||| Eksempel 16.24 Fra løsning til differentialligning

Løsningsmængden til en lineær 1. ordens inhomogen differentialligning er givet ved

$$L_{inhom} = \left\{\, x(t) = t\mathrm{e}^{-5t} + ct\,,\; t > 0 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \,\right\}. \tag{16-52}$$

Bestem den tilhørende differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)\,. \tag{16-53}$$

(Altså bestem $p(t)$ og $q(t)$).

Først betragtes den tilsvarende homogene differentialligning. Vi spotter straks via struktursætningen at

$$L_{hom} = \{ \, x(t) = ct \, , \; t > 0 \; \big| \; c \in \mathbb{R} \, \}$$

Ved indsættelse af $x(t) = ct$ i den homogene differentialligning $x'(t) + p(t)x(t) = 0$ fås

$$c + p(t)ct = 0 \, , \tag{16-54}$$

og da denne ligning skal gælde for alle c

$$p(t) = -\frac{1}{t} \, . \tag{16-55}$$

Da vi nu kender $p(t)$, mangler vi kun at bestemme højresiden $q(t)$. Ok, den finder vi ved at indsætte den partikulære løsning $x(t) = t\mathrm{e}^{-5t}$ i differentialligningens venstreside.

$$\mathrm{e}^{-5t} - 5t\mathrm{e}^{-5t} - \frac{1}{t} \cdot t\mathrm{e}^{-5t} = -5t\mathrm{e}^{-5t} = q(t) \, . \tag{16-56}$$

Da nu både $p(t)$ og $q(t)$ er bestemt, er hele differentialligningen bestemt:

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = -5t\mathrm{e}^{-5t} \, , \; t > 0 \, . \tag{16-57}$$

16.7 Endeligt dimensionalt definitionsrum

I visse situationer ved man i forvejen hvilke typer af løsninger på differentialligningen man er interesseret i at finde. Man kan derfor vælge at indskrænke definitionsrummet $C^1(\mathbb{R})$. Vi afslutter denne eNote med et eksempel hvor definitionsrummet er et endeligt dimensionalt underrum i $C^1(\mathbb{R})$ hvilket giver anledning til introduktion af matrixmetoder.

|||| Eksempel 16.25 Løsning ved matrixregning

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) + (1-2t)x(t) = 7t - 4t^3 \, . \tag{16-58}$$

I dette eksempel er vi kun interesseret i løsninger der tilhører polynomiumsrummet $P_2(\mathbb{R})$, dvs. det underrum i $C^1(\mathbb{R})$ som har monomiebasen $(1, t, t^2)$.

For at finde billedrummet $f\left(P_2(\mathbb{R})\right)$ ved den lineære afbildning f som repræsenterer differentialligningens venstreside, bestemmer vi først billederne af basisvektorerne:

$$f(1) = 1 - 2t\,,\; f(t) = 1 + t - 2t^2 \;\text{ og }\; f(t^2) = 2t + t^2 - 2t^3\,.$$

Idet $P_3(\mathbb{R})$ har monomiebasen $(1, t, t^2, t^3)$, og de fundne billeder ligger i dens udspænding, ser vi at billedrummet $f\left(P_2(\mathbb{R})\right)$ er et underrum i $P_3(\mathbb{R})$.

Vi skal løse ligningen

$$f(x(t)) = 7t - 4t^3$$

som kan udtrykkes på matrixform ved

$$\mathbf{F}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor $\mathbf{F}$ er afbildningsmatricen for f med hensyn til monomiebaserne i $P_2(\mathbb{R})$ og $P_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}$ er koordinatmatricen for det ukendte polynomium med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$, og $\mathbf{b}$ er koordinatmatricen for differentialligningens højreside med hensyn til monomiebasen i $P_3(\mathbb{R})$.

Differentialligningen kan dermed løses som et inhomogent lineært ligningssystem. De første tre søjler i ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ udgøres af $\mathbf{F}$, mens den fjerde søjle er $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da rangen af $\mathbf{T}$ ses at være 3, har differentialligningen kun én løsning. Da fjerde søjle i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ angiver løsningens koordinatvektor med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$, kan løsningen umiddelbart aflæses

$$x_0(t) = -1 + t + 2t^2\,.$$

|||| Opgave 16.26

1. Løs differentialligningen i eksempel 16.25 ved gættemetode eller Panserformlen.
2. Hvordan adskiller løsningsmængden sig fra den der blev fundet i eksemplet?

|||| Opgave 16.27

Erstat højresiden i differentialligningen i eksempel 16.25 med funktionen $q(t) = 1$.

1. Vis ved matrixregning at differentialligningen ikke har en løsning inden for det i eksemplet givne underrum $P_2(\mathbb{R})$.
2. Find med Maple (eller anden software) den løsning $x_0(t)$ til differentialligningen som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_0(t) = 0$ og tegn den.