eNote 15

Symmetriske matricer

I denne eNote vil vi beskæftige os med et af de mest benyttede resultater fra lineær algebra – den såkaldte spektralsætning *for symmetriske matricer. Den siger kort fortalt, at* alle *symmetriske matricer kan* diagonaliseres *ved en similartransformation, altså ved et basisskift foretaget med en passende substitutionsmatrix.*
Indførelsen af disse begreber og tilhørende metoder blev givet i eNote 14, som derfor er en fundamental basis for nærværende eNote.
Netop i den eNote blev det klart, at ikke alle matricer kan diagonaliseres. Diagonalisering kræver, at der er tilstrækkelig mange egenværdier (de algebraiske multipliciteter summer op til at være størst mulig) og at deres egenvektorrum faktisk udfylder hele vektorrummet (de geometriske multipliciteter summer op til at være størst mulig). Det er disse egenskaber, som vi vil beskæftige os med, men nu for symmetriske matricer, der viser sig at opfylde betingelserne og faktisk mere til: De egenvektorer vi benytter i den resulterende substitutionsmatrix kan vælges parvis ortogonale, sådan at den nye basis fremkommer ved en rotation af den gamle sædvanlige basis i $\mathbb{R}^n$.
For at kunne diskutere og anvende spektralsætningen mest effektivt må vi først indføre et naturligt skalarprodukt for vektorer i $\mathbb{R}^n$ *sådan at vi kan måle vinkler og længder i alle dimensioner. Det gør vi selvfølgelig med udgangspunkt i det velkendte sædvanlige skalarprodukt fra* $\mathbb{R}^2$ *og* $\mathbb{R}^3$*. Som antydet vil vi specielt benytte baser bestående af parvis ortogonale vektorer til at opstille og forstå hvad spektralsætningen går ud på og hvad vi kan bruge den til.*

15.1 Skalarprodukt

I vektorrummet $\mathbb{R}^n$ indføres et indre produkt, dvs. et skalarprodukt, som er en naturlig generalisering af det velkendte skalarprodukt fra plangeometri og rumgeometri, se eNote 6.

|||| Definition 15.1 Skalarprodukt

Lad **a** og **b** være to givne vektorer i $\mathbb{R}^n$ med koordinaterne henholdsvis $(a_1, ..., a_n)$ og $(b_1, ..., b_n)$ med hensyn til den sædvanlige basis e i $\mathbb{R}^n$:

$$
{}_e\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \quad , \quad \text{og} \quad {}_e\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \quad . \tag{15-1}
$$

Så definerer vi ***skalarproduktet, det indre produkt***, af de to vektorer på følgende måde:

$$
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad . \tag{15-2}
$$

Når $\mathbb{R}^n$ udstyres med dette skalarprodukt er $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ dermed et eksempel på et såkaldt ***Euklidisk vektorrum***, eller et ***vektorrum med indre produkt***.

Skalarproduktet kan udtrykkes som et matrix-produkt:

$$
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}_e\mathbf{a}^\top \cdot {}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \tag{15-3}
$$

For det indførte skalarprodukt gælder følgende regneregler

|||| Sætning 15.2 Regneregler for skalarprodukt

Hvis $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ og k er et vilkårligt reelt tal gælder:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{15-4}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{15-5}$$

$$\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{15-6}$$

En hovedpointe ved indførelsen af et skalarprodukt er, at vi nu kan tale om *længder af vektorerne* i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$:

|||| Definition 15.3 Længden af en vektor

Lad $\mathbf{a}$ være en vektor i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ med koordinaterne $(a_1, ..., a_n)$ med hensyn til standard e-basis i $\mathbb{R}^n$. Så er ***længden af*** $\mathbf{a}$ defineret ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \quad . \tag{15-7}$$

Længden af $\mathbf{a}$ kaldes også ***normen af*** $\mathbf{a}$ med hensyn til skalarproduktet i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. En vektor $\mathbf{a}$ kaldes en ***egentlig vektor*** hvis $|\mathbf{a}| > 0$.

Det følger af definition 15.1 at der gælder

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0 \;\text{ for alle }\; \mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n, \cdot) \;\text{ og} \\ &\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{15-8}$$

Heraf ses umiddelbart at

$$\begin{aligned} &|\mathbf{a}| \geq 0, \;\text{ for alle }\; \mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n, \cdot) \;\text{ og} \\ &|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{15-9}$$

En *egentlig* vektor er altså en vektor som ikke er **0**-vektoren.

Endelig følger det af definition 15.1 og definition 15.3 at der for $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$ og et vilkårligt reelt tal k gælder gælder

$$|k\mathbf{a}| = |k|\;|\mathbf{a}|\;. \tag{15-10}$$

Vi er nu i stand til at vise følgende vigtige sætning:

|||| Sætning 15.4 Cauchy-Schwarz' ulighed

For vilkårlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ gælder

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\,\mathbf{a}\,|\;|\,\mathbf{b}\,|\;, \tag{15-11}$$

hvor lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært afhængige.

|||| Bevis

Hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, er begge sider i (15.1.11) lig 0 og uligheden dermed opfyldt. I det følgende forudsættes $\mathbf{b}$ at være en egentlig vektor.

Vi sætter $k = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ og $\mathbf{e} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\mathbf{b}$. Så følger det af (15.1.6) at

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = \Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathbf{b}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathbf{b}\Big) = \frac{1}{k}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) = 1$$

og dermed at $|\mathbf{e}| = 1$.

Ved at indsætte $\mathbf{b} = \sqrt{k}\,\mathbf{e}$ i venstresiden og højresiden af (15.1.11) fr vi ved brug af (15.1.6) og

(15.1.10):

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\,\mathbf{a}\cdot(\sqrt{k}\,\mathbf{e})\,| = \sqrt{k}\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}|$$

og

$$|\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\;|\,\sqrt{k}\,\mathbf{e}\,| = \sqrt{k}\,|\mathbf{a}|\;|\mathbf{e}|\;.$$

Vi behøver derfor kun at vise at der for vilkårlige $\mathbf{a}$ og $\mathbf{e}$, hvor $|\mathbf{e}| = 1$, gælder

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}| \leq |\,\mathbf{a}\,| \tag{15-12}$$

hvor lighedstegnet skal gælde, hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{e}$ er lineært afhængige.

For et vilkårligt $t \in \mathbb{R}$ gælder ifølge (15.1.8), (15.1.5) og (15.1.6):

$$0 \leq (\mathbf{a} - t\mathbf{e})\cdot(\mathbf{a} - t\mathbf{e}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + t^2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) - 2t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + t^2 - 2t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\,.$$

Hvis vi her specielt vælger $t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}$, får vi

$$0 \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})^2 \;\Leftrightarrow\; |\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}| \leq \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|\;.$$

Da det ifølge (15.1.8) glder at $(\mathbf{a} - t\mathbf{e})\cdot(\mathbf{a} - t\mathbf{e}) = 0$ hvis og kun hvis $(\mathbf{a} - t\mathbf{e}) = \mathbf{0}$, ser vi at $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}| = |\,\mathbf{a}\,|$ hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{e}$ er lineært afhængige. Beviset er hermed fuldført.

■

Af Cauchy-Schwarz' ulighed følger trekantuligheden, som er en generalisering af den fra elementær plangeometri kendte sætning, at en side i en trekant altid er mindre end eller lig med summen af de to øvrige sider:

|||| Følgesætning 15.5 Trekant-uligheden

For vilkårlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ gælder

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\;. \tag{15-13}$$

|||| Opgave 15.6

Bevis følgesætning 15.5.

Bemærk at der af Cauchy-Schwarz' ulighed følger:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \leq 1 \quad . \tag{15-14}$$

Vinklen mellem to vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ kan derfor indføres således:

|||| Definition 15.7 Vinklen mellem vektorer

Lad $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være to givne egentlige vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ med koordinaterne $(a_1, ..., a_n)$ og $(b_1, ..., b_n)$ med hensyn til den sædvanlige basis i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Så er ***vinklen mellem* a *og* b** defineret ved den værdi af θ i intervallet $[0, \pi]$ som opfylder

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \quad . \tag{15-15}$$

Hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ så siger vi, at de to egentlige vektorer er ***ortogonale*** eller ***vinkelrette*** på hinanden. Det optræder præcis når $\cos(\theta) = 0$, altså når $\theta = \pi/2$.

15.2 Symmetriske matricer og skalarproduktet

Vi kender symmetri-begrebet for kvadratformede matricer:

|||| Definition 15.8

En kvadratformet matrix $\mathbf{A}$ er ***symmetrisk*** hvis den er lig med sin egen transponerede

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \quad , \tag{15-16}$$

altså hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle elementerne i matricen.

Hvad har symmetriske matricer med skalarproduktet at gøre? Det ser vi på her:

|||| Sætning 15.9

Lad $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ betegne to vektorer i vektorrummet $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ med det indførte skalarprodukt. Hvis $\mathbf{A}$ er en vilkårlig $(n \times n)-$matrix gælder

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{A}^\top\,\mathbf{w}\right) \quad . \tag{15-17}$$

|||| Bevis

Vi benytter, at skalarproduktet kan udtrykkes ved et matrixprodukt:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= (\mathbf{A}\,\mathbf{v})^\top\cdot\mathbf{w}\\ &= \left(\mathbf{v}^\top\mathbf{A}^\top\right)\cdot\mathbf{w}\\ &= \mathbf{v}^\top\cdot\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{w}\right)\\ &= \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{w}\right) \quad .\end{aligned} \tag{15-18}$$

■

Det kan vi nu bruge til at karakterisere symmetriske matricer:

|||| Sætning 15.10

En matrix $\mathbf{A}$ er en symmetrisk $(n \times n)-$matrix hvis og kun hvis

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{A}\,\mathbf{w}) \tag{15-19}$$

for alle vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

|||| Bevis

Hvis $\mathbf{A}$ er symmetrisk, så har vi at $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ og derfor ligning (15.2.19) direkte fra (15.2.17). Omvendt, hvis vi antager at (15.2.19) gælder for alle $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, s skal vi vise, at $\mathbf{A}$ er symmetrisk.

Men det følger let ved blot at *vlge* passende vektorer, f.eks. $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$ og $\mathbf{w} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, ..., 0)$ og indsætte i (15.2.19) som nedenfor. Bemærk, at $\mathbf{A}\,\mathbf{e}_i$ er den i'te søjle-vektor i $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\,\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3 &= a_{23} \\ &= \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{A}\,\mathbf{e}_3) \\ &= (\mathbf{A}\,\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_2 \\ &= a_{32} \quad ,\end{aligned} \tag{15-20}$$

sådan at $a_{23} = a_{32}$. Helt tilsvarende fås for alle andre valg af indices i og j at $a_{ij} = a_{ji}$ – og det var det vi skulle vise.

■

En basis a i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ består (som bekendt fra eNote 7) af n lineæet uafhængige vektorer $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$. Hvis vektorerne derudover er parvis ortogonale og har længden 1 med hensyn til det indførte skalarprodukt, s er $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ en ***ortonormal basis for*** $(\mathbb{R}^n, \cdot)$:

|||| Definition 15.11

En basis a $= (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ er en *ortonormal basis* hvis

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \quad , \\ 0 & \text{for } i \neq j \quad . \end{cases} \tag{15-21}$$

|||| Opgave 15.12

Vis, at hvis n vektorer $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ opfylder ligningen (15.2.21), så er a $= (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ automatisk en *basis* for $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, dvs. vektorerne er garanteret lineært uafhængige og udspænder hele $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

|||| Opgave 15.13

Vis, at følgende 3 vektorer $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ udgør en ortonormal basis a for $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ for enhver given værdi af $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (\cos(\theta), 0, -\sin(\theta)) \\ \mathbf{a}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{a}_3 &= (\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \quad .\end{aligned} \tag{15-22}$$

Hvis vi sætter vektorerne fra en ortonormal basis ind som søjler i en matrix fås en ***ortogonal matrix***:

|||| Definition 15.14

En $(n \times n)-$matrix $\mathbf{A}$ siges at være *ortogonal* hvis søjlevektorerne i $\mathbf{A}$ udgør en ortonormal basis for $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, altså hvis søjlevektorerne er parvis ortogonale og alle har længden 1 – som også udtrykt i ligning (15.2.21).

Bemærk, at *ortogonale matricer* alternativt (og måske mere betegnende) kunne kaldes *ortonormale*, idet søjlerne i matricen ikke bare er parvis ortogonale men også normerede, så de alle har længde 1. Vi vil følge international skik og brug og kalder matricerne ortogonale.

Det er let at checke om en given matrix er ortogonal:

|||| Sætning 15.15

En $(n \times n)-$matrix $\mathbf{Q}$ er ortogonal hvis og kun hvis

$$\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}_{n \times n} \quad , \tag{15-23}$$

som er helt ækvivalent med

$$\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1} \quad . \tag{15-24}$$

|||| Bevis

Se eNote 3 om beregningen af matrixproduktet og sammenlign dernæst med betingelsen for ortogonalitet af søjlevektorerne i $\mathbf{Q}$ (ligning (15.2.21)).

■

Ortogonale matricer er *regulære*:

|||| Opgave 15.16

Vis, at for at en matrix $\mathbf{A}$ kan være ortogonal, så er det en nødvendig betingelse at

$$|\det(\mathbf{A})| = 1 \quad . \tag{15-25}$$

Vis at den betingelse ikke er tilstrækkelig, altså at der findes matricer, som opfylder denne determinant-betingelse, men som ikke er ortogonale.

|||| Definition 15.17

En ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ kaldes ***positiv ortogonal*** hvis $\det(\mathbf{Q}) = 1$ og den kaldes ***negativ ortogonal*** hvis $\det(\mathbf{Q}) = -1$.

Læg mærke til, at determinanten af en ortogonal matrix aldrig er 0, så enhver ortogonal matrix er enten positiv ortogonal eller negativ ortogonal.

|||| Opgave 15.18

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R} \quad . \tag{15-26}$$

Bestem de værdier af a for hvilke $\mathbf{A}$ er ortogonal og angiv i hvert tilfælde om $\mathbf{A}$ er positiv ortogonal eller negativ ortogonal.

15.3 Gram–Schmidt ortonormalisering

Vi beskriver her en procedure til at bestemme en ortonormal basis i et underrum af vektorrummet $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Lad U være et $p-$dimensionalt underrum af $(\mathbb{R}^n, \cdot)$; vi antager, at U er udspændt af p givne lineært uafhængige vektorer $(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p)$, som altså derved udgør en basis u for U. Gram–Schmidt ortonormaliseringen går ud på at konstruere en ny basis $\mathrm{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p)$ for underrummet U ud fra den givne basis u sådan at de nye vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$ er *parvis ortogonale og har længden* 1.

|||| Metode 15.19 Gram–Schmidt ortonormalisering

Gram–Schmidt ortonormalisering af p lineært uafhængige vektorer $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p$ i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$:

1. Begynd med at normere $\mathbf{u}_1$ og kald resultatet $\mathbf{v}_1$, dvs.:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} \quad . \tag{15-27}$$

2. Den næste vektor $\mathbf{v}_2$ i basen v vælges nu i span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ men sådan at det samtidig sikres, at $\mathbf{v}_2$ er ortogonal på $\mathbf{v}_1$, altså $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$; til sidst normeres. Først konstrueres en *hjælpevektor* $\mathbf{w}_2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} \quad . \end{aligned} \tag{15-28}$$

Læg mærke til, at $\mathbf{w}_2$ (og derfor også $\mathbf{v}_2$) så er ortogonal på $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\, |\mathbf{v}_1|^2 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{15-29}$$

3. Således fortsættes

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{u}_i - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{v}_2 - \cdots - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1})\, \mathbf{v}_{i-1} \\ \mathbf{v}_i &= \frac{\mathbf{w}_i}{|\mathbf{w}_i|} \quad . \end{aligned} \tag{15-30}$$

4. Indtil sidste vektor $\mathbf{u}_p$ er brugt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= \mathbf{u}_p - \left(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_1\right) \mathbf{v}_1 - \left(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_2\right) \mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}\right) \mathbf{v}_{p-1} \\ \mathbf{v}_p &= \frac{\mathbf{w}_p}{|\mathbf{w}_p|} \quad . \end{aligned} \tag{15-31}$$

De konstruerede v-vektorer udspænder samme underrum U som de givne lineært uafhængige u-vektorer, $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ og $\text{v} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p)$ udgør en ortonormal basis for U.

|||| Eksempel 15.20

I $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ vil vi ved hjælp af Gram–Schmidt ortonormaliserings-metoden finde en ortonormal basis $\mathrm{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ for det 3−dimensionale underrum U, der er udspændt af tre givne lineært uafhængige (!) vektorer som har følgende koordinater med hensyn til standard e-basis i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = (2, 2, 4, 1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = (0, 0, -5, -5) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = (5, 3, 3, -3) \quad .$$

Vi konstruerer de nye basisvektorer med hensyn til standard e-basis i $\mathbb{R}^4$ ved at gå igennem ortonormaliseringsproceduren. Der er 3 'step' da der i dette eksempel er 3 lineært uafhængige vektorer i U :

1.
$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{1}{5}(2, 2, 4, 1) \quad . \tag{15-32}$$

2.
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1, -4) \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{1}{5}(2, 2, -1, -4) \quad . \end{aligned} \tag{15-33}$$

3.
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - 5\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3}{|\mathbf{w}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) \quad . \end{aligned} \tag{15-34}$$

Vi har dermed konstrueret en ortonormal basis for underrummet U bestående af de vektorer, der med hensyn til den sædvanlige basis har koordinaterne:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \cdot (2, 2, 4, 1) \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \cdot (2, 2, -1, -4) \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1, 0, 0) \quad .$$

Vi kan checke, at der virkelig er tale om en ortonormal basis ved at stille vektorerne op som søjler i en matrix, som dermed får typen (4×3) således :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/\sqrt{2} \\ 2/5 & 2/5 & -1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix} \tag{15-35}$$

Matricen $\mathbf{V}$ kan ikke være en ortogonal matrix (på grund af typen), men alligevel kan $\mathbf{V}$ tilfredsstille følgende ligning, som viser, at de tre nye basisvektorer netop er parvis ortogonale og alle har længden 1 !

$$\mathbf{V}^{\top}\cdot\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 & -4/5 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/\sqrt{2} \\ 2/5 & 2/5 & -1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-36}$$

|||| Opgave 15.21

I $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ er givet følgende vektorer med hensyn til den sædvanlige basis e:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = (3,1,1,3) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = (2,0,-2,4) \quad , \quad \mathbf{u}_4 = (1,1,-1,3) \quad .$$

Vi lader U betegne det underrum i $(\mathbb{R}^4, \cdot)$, som er udspændt af de fire givne vektorer, altså

$$U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} \quad . \tag{15-37}$$

1. Vis, at u $= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ er en basis for U, og find koordinaterne for $\mathbf{u}_4$ med hensyn til denne basis.

2. Angiv en ortonormal basis for U.

|||| Eksempel 15.22

I $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ kræves en given første enheds-vektor $\mathbf{v}_1$ benyttet til en ny ortonormal basis v$=(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ og opgaven er at finde de to andre vektorer til basen. Lad os antage at den givne vektor er $\mathbf{v}_1 = (3,0,4)/5$. Det ses umiddelbart, at f.eks. $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ er en enhedsvektor, der er ortogonal på $\mathbf{v}_1$. En sidste vektor til den ortonormale basis kan så findes direkte ved brug af *krydsproduktet*: $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\cdot(-4,0,3)$.

15.4 Det ortogonale komplement til et underrum

Lad U være et underrum i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, som er udspændt af p givne lineært uafhængige vektorer, $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$. Mængden af de vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ som hver for sig er ortogonal på samtlige vektorer i U er selv et underrum i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, og det har dimensionen $n - p$:

|||| Definition 15.23

Det ***ortogonale komplement*** til et underrum U i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ betegnes med $U^\perp$ og består af alle vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ som er ortogonale på hver eneste vektor i U:

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0\,, \text{ for alle } \; \mathbf{u} \in U\,\} \quad . \tag{15-38}$$

|||| Sætning 15.24

Det ortogonale komplement $U^\perp$ til et givet $p-$dimensionalt underrum U i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ er selv et underrum i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ og det har dimensionen $\dim(U^\perp) = n - p$.

|||| Bevis

Det er let at checke alle underrums-egenskaberne for $U^\perp$; det er klart, at hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale på alle vektorerne i U og k er et reelt tal, så er $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ også ortogonal på alle vektorerne i U. Da den eneste vektor, der er ortogonal på sig selv er $\mathbf{0}$ er dette også den eneste vektor i fællesmængden: $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Hvis vi lader v$= (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p)$ betegne en *ortonormal basis* for U og w$= (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_r)$ en ortonormal basis for $U^\perp$, så er $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_r)$ en ortonormal basis for underrummet $S = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_r\}$ i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Hvis vi nu antager, at S ikke er hele $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, så kan basen for S udvides med mindst én vektor så det udvidede system er lineært uafhængig i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$; dermed får vi - ved at bruge det sidste step i Gram–Schmidt metoden - en ny vektor, som er ortogonal på alle vektorer i U men som ikke er element i $U^\perp$; og det er en modstrid, fordi $U^\perp$ er defineret til at være *alle* de vektorer i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, som er ortogonal på hver enkelt vektor i U. Derfor er antagelsen om, at S ikke er hele $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ forkert. Det vil sige, at $S = \mathbb{R}^n$ og derfor er $r + p = n$, sådan at $\dim(U^\perp) = r = n - p$; og det var det vi skulle vise.

■

|||| Eksempel 15.25

Det ortogonale komplement til $U = \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ i $\mathbb{R}^3$ (for lineært uafhængige vektorer – og derfor egentlige vektorer – $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$) er $U^\perp = \text{span}\{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$.

|||| Opgave 15.26

Bestem det ortogonale komplement til underrummet $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ i $(\mathbb{R}^4, \cdot)$, når de udspændende vektorer er givet ved deres respektive koordinater med hensyn til den sædvanlige basis e i $\mathbb{R}^4$ således:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = (3, 1, 1, 3) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = (2, 0, -2, 4) \quad . \tag{15-39}$$

15.5 Spektralsætningen for symmetriske matricer

Vi vil nu tage fat på at formulere spektralsætningen og begynder med følgende ikke-trivielle observation om symmetriske matricer:

|||| Sætning 15.27

Lad $\mathbf{A}$ betegne en symmetrisk $(n \times n)-$matrix. Så har det karakteristiske polynomium $\mathcal{K}_\mathbf{A}(\lambda)$ for $\mathbf{A}$ præcis n reelle rødder (regnet med multiplicitet):

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \quad . \tag{15-40}$$

Dvs. $\mathbf{A}$ har n reelle egenværdier (regnet med multiplicitet).

Hvis f.eks. $\{7, 3, 3, 2, 2, 2, 1\}$ er rødderne i $\mathcal{K}_\mathbf{A}(\lambda)$ for en $(7 \times 7)-$matrix $\mathbf{A}$, så skal disse rødder altså repræsenteres *med deres respektive multiplicitet* i egenværdi-listen:

$$\lambda_1 = 7 \geq \lambda_2 = 3 \geq \lambda_3 = 3 \geq \lambda_4 = 2 \geq \lambda_5 = 2 \geq \lambda_6 = 2 \geq \lambda_7 = 1 \quad .$$

Da sætning 15.27 udtrykker en helt afgørende egenskab ved symmetriske matricer, vil vi her give et bevis for den:

|||| Bevis

Fra algebraens fundamentalsætning ved vi, at $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ har præcis n komplekse rødder - vi ved bare ikke om de er reelle; det er det vi skal vise. Så vi lader $\alpha + i\,\beta$ være en kompleks rod i $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ og skal så vise, at $\beta = 0$. Læg mærke til, at α og β naturligvis begge er reelle tal.

Vi har altså

$$\det\left(\mathbf{A} - (\alpha + i\,\beta)\mathbf{E}\right) = 0 \quad , \tag{15-41}$$

og derfor også, at

$$\det\left(\mathbf{A} - (\alpha + i\,\beta)\mathbf{E}\right) \cdot \det\left(\mathbf{A} - (\alpha - i\,\beta)\mathbf{E}\right) = 0 \tag{15-42}$$

sådan at

$$\begin{aligned} \det\left((\mathbf{A} - (\alpha + i\,\beta)\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} - (\alpha - i\,\beta)\mathbf{E})\right) &= 0 \\ \det\left((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})^2 + \beta^2\,\mathbf{E}\right) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{15-43}$$

Den sidste ligning giver, at rangen af den reelle matrix $\left((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})^2 + \beta^2\,\mathbf{E}\right)$ er mindre end n; det medfører nu (se eNote 2), at der findes egentlige reelle løsninger $\mathbf{x}$ til det tilsvarende ligningssystem

$$\left((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})^2 + \beta^2\,\mathbf{E}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad . \tag{15-44}$$

Lad os vælge sådan en egentlig reel løsning $\mathbf{v}$ til (15.5.44) med $|\mathbf{v}| > 0$. Ved at benytte, at $\mathbf{A}$ antages at være symmetrisk har vi så:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\left((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})^2 + \beta^2\,\mathbf{E}\right)\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} \\ &= \left((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})^2\,\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} + \beta^2\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= ((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})\,\mathbf{v}) \bullet ((\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})\,\mathbf{v}) + \beta^2|\mathbf{v}|^2 \\ &= |\,(\mathbf{A} - \alpha\,\mathbf{E})\,\mathbf{v}|^2 + \beta^2|\mathbf{v}|^2 \quad , \end{aligned} \tag{15-45}$$

men da $|\mathbf{v}| > 0$ så må vi konkludere, at $\beta = 0$, fordi ellers kan det sidste udtryk i ovenstående omskrivninger ikke være 0; og det var det vi skulle vise.

■

|||| Opgave 15.28

Hvor var det så lige, at vi *faktisk brugte* symmetrien af $\mathbf{A}$ i ovenstående bevis?

Til hver egenværdi λ_i for en given matrix $\mathbf{A}$ hører et egenvektorrum E_{λ_i}, som er et større eller mindre underrum i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Hvis to eller flere egenværdier for en given matrix er ens, dvs. hvis der er tale om en multipel (f.eks. k gange) rod $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots \lambda_{i+k-1}$ i det karakteristiske polynomium, så er de tilhørende egenvektorrum selvfølgelig også ens: $E_{\lambda_i} = E_{\lambda_{i+1}} = \cdots E_{\lambda_{i+k-1}}$. Vi vil se nedenfor i sætning 15.30 at for symmetriske matricer er dimensionen af det fælles egenvektorrum E_{λ_i} præcis lig med den algebraiske multiplicitet k af egenværdien λ_i.

Hvis to egenværdier λ_i og λ_j for en *symmetrisk* matrix er *forskellige*, så er de to tilhørende egenvektorrum *ortogonale*, $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$ i følgende forstand:

|||| Sætning 15.29

Lad $\mathbf{A}$ være en symmetrisk matrix og lad λ_1 og λ_2 være to forskellige egenværdier for $\mathbf{A}$ og lad $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ betegne to tilhørende egenvektorer. Så er $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, dvs. de er ortogonale.

|||| Bevis

Da $\mathbf{A}$ er symmetrisk har vi fra (15.2.19):

$$
\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{A}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_2) \\
&= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\
&= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad ,
\end{aligned}
\tag{15-46}
$$

og da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ får vi derfor følgende konklusion: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, og det var det, vi skulle vise.

■

Vi kan nu formulere en af de oftest anvendte resultater for symmetriske matricer, ***spektralsætningen for symmetriske matricer***, som af gode grunde også kaldes sætningen om ***diagonalisering af symmetriske matricer***:

|||| Sætning 15.30

Lad $\mathbf{A}$ betegne en *symmetrisk* $(n \times n)-$*matrix*. Så findes der en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{Q} \quad \text{er en diagonal-matrix} \quad . \tag{15-47}$$

Det vil sige, at en reel symmetrisk matrix kan diagonaliseres ved en *positiv ortogonal substitution*, dvs. en simulartransformation (se eNote 14) hvor den diagonaliserende matrix er positiv ortogonal.

Det er muligt at konstruere diagonalmatricen simpelt ud fra de n reelle egenværdier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ for $\mathbf{A}$ således:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} . \tag{15-48}$$

Husk: En symmetrisk matrix har præcis n reelle egenværdier når vi tæller dem med multiplicitet.

Den positive ortogonale matrix $\mathbf{Q}$ konstrueres ved som søjler i matricen at bruge egenvektorer fra de tilhørende egenvektor-rum $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \cdots, E_{\lambda_n}$ i den rigtige rækkefølge:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \; \cdots \mathbf{v}_n] \quad , \tag{15-49}$$

hvor $\mathbf{v}_1 \in E_{\lambda_1}$, $\mathbf{v}_2 \in E_{\lambda_2}$, $\cdots$, $\mathbf{v}_n \in E_{\lambda_n}$, idet valget af egenvektorer i de respektive egenvektorrum foretages således at

1. De valgte egenvektorer hørende til samme egenværdi er ortogonale (brug Gram–Schmidt ortonormalisering i hvert fælles egenvektorrum)

2. De valgte egenvektorer har alle længden 1 (ellers skal de bare normeres)

3. Den resulterende matrix $\mathbf{Q}$ er *positiv* ortogonal (hvis den ikke er det, så skift fortegn på én af de valgte egenvektorer)

At dette kan lade sig gøre følger af de ovenstående resultater og bemærkninger – vi gennemgår en række konstruktive eksempler nedenfor.

15.6 Eksempler på diagonalisering

Her er nogle typiske eksempler der viser, hvordan man diagonaliserer passende små symmetriske matricer, dvs. symmetriske matricer af type (2×2) eller type (3×3):

|||| Eksempel 15.31 Diagonalisering ved ortogonal substitution

En symmetrisk $(3 \times 3)-$matrix $\mathbf{A}$ er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-50}$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{AQ} = \mathbf{\Lambda} \quad . \tag{15-51}$$

Først bestemmes egenværdierne for $\mathbf{A}$: Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)^2 \cdot (7 - \lambda) \quad , \tag{15-52}$$

så $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$, og $\lambda_3 = 1$. Dermed ved vi allerede nu via sætning 15.30, at det er muligt at konstruere en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{diag}(7, 1, 1) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-53}$$

Resten af opgaven består nu i at finde de egenvektorer for $\mathbf{A}$ der kan bruges som søjler i den ortogonale matrix $\mathbf{Q}$.

Egenvektorerne for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 7$ fås ved at løse det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K_A}(7) = \mathbf{A} - 7\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-54}$$

som med passende rækkeoperationer ses at have

$$\mathrm{trap}(\mathbf{K_A}(7)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-55}$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u} = t \cdot (1, -2, 1) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{15-56}$$

sådan at $E_7 = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{6}) \cdot (1, -2, 1)$ er derfor en ortonormal basis for E_7 (og den kan altså bruges som første søjle vektor i den søgte $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & * & * \\ -2/\sqrt{6} & * & * \\ 1/\sqrt{6} & * & * \end{bmatrix} \quad . \tag{15-57}$$

Vi ved fra sætning 15.30, at de to resterende søjler fås ved tilsvarende at finde alle egenvektorerne E_1 hærende til egenværdien $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ og dernæst udvælge to ortonormale egenvektorer fra E_1.

Reduktionsmatricen hørende til egenværdien 1 er

$$\mathbf{K_A}(1) = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-58}$$

som igen via passende rækkeoperationer ses at have

$$\text{trap}(\mathbf{K_A}(1)) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-59}$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u} = t_1 \cdot (2, 1, 0) + t_2 \cdot (-1, 0, 1) \quad , \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad t_2 \in \mathbb{R} \quad , \tag{15-60}$$

sådan at $E_1 = \text{span}\{(-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

Vi finder en ortonormal basis for E_1 ved hjælp af Gram–Schmidt ortonormalisering af $\text{span}\{(-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ således: Da vi allerede har defineret $\mathbf{v}_1$ sætter vi $\mathbf{v}_2$ til at være

$$\mathbf{v}_2 = \frac{(-1, 0, 1)}{|(-1, 0, 1)|} = (1/\sqrt{2}) \cdot (-1, 0, 1) \quad , \tag{15-61}$$

og dernæst, som i Gram–Schmidt proceduren:

$$\mathbf{w}_3 = (2, 1, 0) - ((2, 1, 0) \bullet \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1) \quad . \tag{15-62}$$

Ved normering får vi derved endelig $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{3}) \cdot (1, 1, 1)$ og dermed har vi alle ingredienserne til den søgte ortogonale matrix $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad . \tag{15-63}$$

Det skal til sidst undersøges, om de valgte egenvektorer giver en positiv ortogonal matrix. Da

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -6 < 0 \quad , \tag{15-64}$$

er $\mathbf{Q}$ negativ ortogonal. En positiv ortogonal matrix fås ved at skifte fortegn på en af søjlerne i $\mathbf{Q}$, eksempelvis den sidste. Bemærk, at en vektor $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ hvis og kun hvis $-\mathbf{v}$ også er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Vi har altså, at

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & (-\mathbf{v}_3) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{15-65}$$

er en *positiv* ortogonal matrix, der diagonaliserer $\mathbf{A}$.

Det eftervises ved en direkte udregning:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{15-66}$$

så pengene passer.

Vi skal også til slut lige bemærke her, at i stedet for at bruge Gram–Schmidt ortonormalisering til bestemmelse af $\mathbf{v}_3$ kunne vi have brugt krydsproduktet $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (se 15.22):

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{3}) \cdot (-1, -1, -1) \quad . \tag{15-67}$$

|||| Eksempel 15.32 Diagonalisering ved ortogonal substitution

En symmetrisk $(2 \times 2)-$matrix $\mathbf{A}$ er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-68}$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad . \tag{15-69}$$

Først bestemmes egenværdierne for $\mathbf{A}$: Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 11-\lambda & -12 \\ -12 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 20)\cdot(\lambda + 5) \quad , \tag{15-70}$$

så $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 20$ og $\lambda_2 = -5$. Dermed har vi nu:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-71}$$

Egenvektorerne for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 20$ fås ved at løse det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(20) = \mathbf{A} - 20\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-72}$$

som med passende rækkeoperationer ses at have den ækvivalente trappe-matrix:

$$\operatorname{trap}(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(20)) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-73}$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u} = t \cdot (4, -3) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{15-74}$$

sådan at $E_{20} = \operatorname{span}\{(4, -3)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/5) \cdot (4, -3)$ er derfor en ortonormal basis for E_{20} (og den kan altså bruges som første søjle vektor i den søgte $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4/5 & * \\ -3/5 & * \end{bmatrix} \quad . \tag{15-75}$$

Den sidste søjle i $\mathbf{Q}$ er en egenvektor hørende til den anden egenværdi $\lambda_2 = -5$ og kan derfor findes ud fra den totale løsningsmængde E_{-5} til det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(-5) = \mathbf{A} - 5 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-76}$$

men da vi jo ved, at den søgte egenvektor er ortogonal på egenvektoren $\mathbf{v}_1$, kan vi umiddelbart blot bruge tværvektoren, $\mathbf{v}_2 = (1/5)\cdot(3,4)$, som klart er en enhedsvektor, der er ortogonal på $\mathbf{v}_1$. Det er let at checke, at $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien -5:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(-5)\cdot\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-77}$$

Vi indsætter derfor $\mathbf{v}_2$ som anden søjle i $\mathbf{Q}$ og får

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-78}$$

Denne matrix har determinanten $\det(\mathbf{Q}) = 1 > 0$, så $\mathbf{Q}$ er en positiv ortogonal substitutionsmatrix, der opfylder at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ er en diagonalmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} &= \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{AQ} \\ &= \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{diag}(20,-5) = \mathbf{\Lambda} \quad . \end{aligned} \tag{15-79}$$

|||| Eksempel 15.33 Diagonalisering ved ortogonal substitution

En symmetrisk $(3\times 3)-$matrix $\mathbf{A}$ er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-80}$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{AQ} = \mathbf{\Lambda} \quad . \tag{15-81}$$

Først bestemmes egenværdierne for $\mathbf{A}$: Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) = -(\lambda-3)\cdot(\lambda-6)\cdot(\lambda-9) \quad , \tag{15-82}$$

hvoraf vi aflæser de tre forskellige egenværdier $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 6$, og $\lambda_3 = 3$ og dermed den diagonalmatrix vi på vej til at kunne skrive som $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(9,6,3) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{15-83}$$

Egenvektorerne for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_3 = 3$ fås ved at løse det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K_A}(3) = \mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-84}$$

som med passende rækkeoperationer ses at have

$$\operatorname{trap}(\mathbf{K_A}(3)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-85}$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u}_3 = t \cdot (1, 2, 2) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{15-86}$$

sådan at $E_3 = \operatorname{span}\{(1, 2, 2)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (1, 2, 2)$ er derfor en ortonormal basis for E_3 og den kan altså bruges som *tredje søjle vektor* i den søgte $\mathbf{Q}$; bemærk nemlig, at vi netop har fundet egenvektorrummet til den *tredje egenværdi* på listen over egenværdier for $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} * & * & 1/3 \\ * & * & 2/3 \\ * & * & 2/3 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-87}$$

Vi ved fra sætning 15.30, at de to resterende søjler fås ved tilsvarende at finde egenvektorrummene E_6 hørende til egenværdien $\lambda_2 = 6$, og egenvektorrummet E_9 hørende til egenværdien $\lambda_1 = 9$.

For $\lambda_2 = 6$ har vi:

$$\mathbf{K_A}(6) = \mathbf{A} - 6 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \tag{15-88}$$

som med passende rækkeoperationer ses at have følgende ækvivalente trappematrix:

$$\operatorname{trap}(\mathbf{K_A}(6)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-89}$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u}_2 = t \cdot (-2, -1, 2) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{15-90}$$

sådan at $E_6 = \operatorname{span}\{(-2, -1, 2)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_2 = (1/3) \cdot (-2, -1, 2)$ er derfor en ortonormal basis for E_6 (og den kan altså bruges som *anden søjle vektor* i den søgte $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} * & -2/3 & 1/3 \\ * & -1/3 & 2/3 \\ * & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-91}$$

I stedet for på samme måde at bestemme egenvektorrummet E_9 for den resterende egenværdi $\lambda_1 = 9$ benytter vi, at det egenvektorrum er udspændt af en vektor $\mathbf{v}_1$, der er ortogonal på både $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_2$, altså kan vi bruge $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = (1/3) \cdot (-2, 2, -1)$, således at vi dermed endelig har

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-92}$$

Denne matrix er positiv ortogonal fordi $\det(\mathbf{Q}) = 1 > 0$, og dermed har vi bestemt en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$, der diagonaliserer $\mathbf{A}$ til diagonalmatricen $\mathbf{\Lambda}$. Det eftervises også let ved en direkte udregning:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ &= \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{diag}(9, 6, 3) = \mathbf{\Lambda} \quad . \end{aligned} \tag{15-93}$$

15.7 Kontrolleret konstruktion af symmetriske matricer

I lyset af ovenstående eksempler er det klart, at hvis vi blot kan konstruere alle ortogonale (2×2)- og (3×3)-matricer $\mathbf{Q}$ (eller for den sags skyld $(n \times n)$-matricer), så kan vi *konstruere* alle symmetriske (2×2)- og (3×3)-matricer $\mathbf{A}$ på formen $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^{\top}$. Vi skal blot *vælge* de ønskede egenværdier i diagonalen for $\mathbf{\Lambda}$.

Enhver positiv ortogonal 2×2-matrix har følgende form, som viser at den er en rotation, en drejning, givet ved en rotations-vinkel φ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad , \tag{15-94}$$

hvor φ er en vinkel i intervallet $[-\pi, \pi]$. Bemærk, at søjlevektorerne er ortogonale og begge har længden 1. Derudover er determinanten $\det(\mathbf{Q}) = 1$, så $\mathbf{Q}$ er positiv ortogonal.

|||| Opgave 15.34

Bevis påstanden om, at *enhver* positiv ortogonal matrix kan fremstilles på formen (15.7.94) for et passende valg af drejningsvinkel φ.

Hvis $\varphi > 0$ så roterer eller drejer $\mathbf{Q}$ vektorer i positiv omløbsretning, altså imod uret; hvis $\varphi < 0$ så drejer $\mathbf{Q}$ vektorer i negativ omløbsretning, altså med uret.

|||| Definition 15.35 Drejnings-matricer

Enhver positiv ortogonal (2×2)-matrix kaldes også en ***drejnings-matrix***.

Da enhver positiv ortogonal 3×3-matrix tilsvarende kan fremstilles ved et produkt af rotationer omkring de tre koordinatakser – se nedenfor – vil vi udvide navngivningen som følger:

|||| Definition 15.36 Rotations-matricer

Enhver positiv ortogonal (3×3)-matrix kaldes en ***rotations-matrix***.

En koordinatakse-rotation, dvs. en rotation med en given vinkel om en af koordinatakserne, er givet ved en af følgende positive ortogonale matricer:

$$
\mathbf{R}_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_y(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & \sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix} \tag{15-95}
$$

$$
\mathbf{R}_z(w) = \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,
$$

hvor de respektive rotationsvinkler er henholdsvis u, v, og w.

|||| Opgave 15.37

Vis ved direkte udregninger, at de tre akserotationsmatricer og ethvert produkt af akserotationsmatricer virkelig *er* positive ortogonale matricer, dvs. de opfylder $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\top}$ og $\det(\mathbf{R}) = 1$.

|||| Opgave 15.38

Find billedvektorerne af hver af de angivne vektorer **a**, **b**, og **c** ved brug af de givne afbildningsmatricer $\mathbf{Q}_i$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,1,1),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{Q}_3 = \mathbf{R}_z(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,1,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{Q}_4 = \mathbf{R}_y(\pi/4)\cdot\mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{Q}_5 = \mathbf{R}_x(\pi/4)\cdot\mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \quad .
\end{aligned} \tag{15-96}$$

Sammensætning af rotationer om koordinatakserne med givne drejningsvinkler u, v, og w om henholdsvis $x-$aksen, $y-$aksen, og $z-$aksen fås ved at finde matrixproduktet af de tre tilsvarende rotationsmatricer.

Her er det helt generelle udtryk for det matrixprodukt for alle værdier af u, v og w:

$$\mathbf{R}(u,v,w) \;=\; \mathbf{R}_z(w)\cdot\mathbf{R}_y(v)\cdot\mathbf{R}_x(u)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(w)\cos(v) & -\sin(w)\cos(u) - \cos(w)\sin(v)\sin(u) & \sin(w)\sin(u) - \cos(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(w)\cos(v) & \cos(w)\cos(u) - \sin(w)\sin(v)\sin(u) & -\cos(w)\sin(u) - \sin(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(v) & \cos(v)\sin(u) & \cos(v)\cos(u) \end{bmatrix} .$$

Der gælder som antydet følgende sætning:

|||| Sætning 15.39 Akse-rotationsvinkler for en given rotationsmatrix

Enhver rotationsmatrix $\mathbf{R}$ (dvs. enhver positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$) kan skrives som et produkt af 3 akserotationsmatricer:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(u, v, w) = \mathbf{R}_z(w) \cdot \mathbf{R}_y(v) \cdot \mathbf{R}_x(u) \quad . \tag{15-97}$$

Med andre ord: Virkningen af enhver rotationsmatrix kan realiseres ved tre på hinanden følgende rotationer om koordinatakserne – med drejningsvinklerne henholdsvis u, v, og w som i ovenstående matrix-produkt.

Når en givet positiv ortogonal matrix $\mathbf{R}$ er givet (med sine matrix-elementer r_{ij}), er det ikke svært at finde disse akserotations-vinkler. Som det fremgår af matrixproduktet ovenfor er f.eks. $\sin(v) = r_{31}$ sådan at $v = \arcsin(r_{31})$ eller $v = \pi - \arcsin(r_{31})$, og $\cos(w)\cos(v) = r_{11}$ sådan at $w = \arccos(r_{11}/\cos(v))$ eller $v = -\arccos(r_{31}/\cos(v))$, når blot $\cos(v) \neq 0$ dvs. når blot $v \neq \pm\pi/2$.

|||| Opgave 15.40

Vis, at hvis $v = \pi/2$ eller $v = -\pi/2$, så er der mange værdier af u og w som giver den *samme* $\mathbf{R}(u, v, w)$. Det vil sige, at vinkelværdierne ikke i alle tilfælde er entydigt bestemte i intervallet $]-\pi, \pi]$ for enhver givet rotationsmatrix $\mathbf{R}$.

|||| Opgave 15.41

Vis, at hvis $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix (en positiv ortogonal matrix), så er $\mathbf{R}^\top$ også en rotationsmatrix, og omvendt: hvis $\mathbf{R}^\top$ er en rotationsmatrix, så er $\mathbf{R}$ også en rotationsmatrix.

|||| Opgave 15.42

Vis, at hvis $\mathbf{R}_1$ og $\mathbf{R}_2$ er rotationsmatricer, så er $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2$ og $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$ også rotationsmatricer. Giv eksempler på, at $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2$ ikke nødvendigvis er den samme rotationsmatrix som $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$.

15.8 Reduktion af andengradspolynomier

En ***kvadratisk form*** i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ er et andengrads-polynomium i n variable – men uden førstegrads- og konstant-led.

|||| Definition 15.43

Lad $\mathbf{A}$ være en symmetrisk $(n \times n)$-matrix og lad $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ betegne koordinaterne for en vilkårlig vektor $\mathbf{x}$ i $(\mathbb{R}, \cdot)$ med hensyn til den sædvanlige basis e i $\mathbb{R}^n$.

En ***kvadratisk form*** i $(\mathbb{R}, \cdot)$ er en funktion af de n variable $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ på følgende form:

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{A}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \end{array}\right] \cdot \mathbf{A} \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \quad ,
\end{aligned}
\tag{15-98}
$$

hvor a_{ij} er de enkelte elementer i $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 15.44 Kvadratisk form som del af andengradspolynomium

Lad $f(x, y)$ betegne følgende andengradspolynomium i de to variable x og y.

$$f(x, y) = 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y - 20 \cdot x + 40 \cdot y - 60 \quad . \tag{15-99}$$

Så kan vi opdele polynomiet i to dele:

$$f(x, y) = P_{\mathbf{A}}(x, y) + (-20 \cdot x + 40 \cdot y - 60) \quad , \tag{15-100}$$

hvor $P_{\mathbf{A}}(x, y)$ er den kvadratiske form

$$P_{\mathbf{A}}(x, y) = 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y \tag{15-101}$$

som repræsenteres ved matricen

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{array}\right] \tag{15-102}$$

Vi vil nu se, hvordan spektralsætningen kan bruges til at skrive enhver kvadratisk form på kort form ved hjælp af egenværdierne for den matrix, der repræsenterer den kvadratiske form.

|||| Sætning 15.45 Reduktion af kvadratisk form

Lad $\mathbf{A}$ være en symmetrisk matrix og lad $P_{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_n)$ betegne den tilhørende kvadratiske form i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ med hensyn til de sædvanlige koordinater. Ved basisskift til nye koordinater $\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n$ givet ved den positive ortogonale basisskiftematrix $\mathbf{Q}$ som diagonaliserer $\mathbf{A}$ fås det reducerede udtryk for den kvadratiske form:

$$P_{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_n) = \widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n) = \lambda_1 \cdot \widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n \cdot \widetilde{x}_n^2 \quad , \tag{15-103}$$

hvor $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ er de n reelle egenværdier for den symmetriske matrix $\mathbf{A}$.

Reduktionen i sætningen består i, at det nye udtryk ikke indeholder noget produktled af typen $x_i \cdot x_j$ for $i \neq j$.

|||| Bevis

Da $\mathbf{A}$ er symmetrisk *kan* den ifølge spektralsætningen diagonaliseres ved en ortogonal substitutionsmatrix $\mathbf{Q}$. Samlingen af søjlevektorer $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ i $\mathbf{Q}$ udgør en ny basis v i $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

Lad $\mathbf{x}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Så har vi følgende koordinatsæt for $\mathbf{x}$, dels med hensyn til den sædvanlige standard e-basis og dels med hensyn til den nye basis v

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{e}}\mathbf{x} &= (x_1, \cdots, x_n) \quad , \\ {}_{\mathrm{v}}\mathbf{x} &= (\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n) \quad . \end{aligned} \tag{15-104}$$

Så er

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= P_{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}\right) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \left(\mathbf{Q}^{\top} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 & \cdots & \widetilde{x}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 & \cdots & \widetilde{x}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix} \\
&= \widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n) \quad = \quad \lambda_1 \cdot \widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n \cdot \widetilde{x}_n^2 \quad .
\end{aligned}
\tag{15-105}
$$

■

Læg mærke til, at den matrix, der repræsenterer den kvadratiske form i eksempel 15.44, ligning (15.8.102), ikke er meget forskellig fra Hesse-matricen $\mathbf{H}f(x,y)$ for $f(x,y)$, som jo også er en konstant matrix, fordi $f(x,y)$ er et andengradspolynomium. Se eNote 18. Faktisk observerer vi, at:

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(x,y) \quad , \tag{15-106}
$$

og det er ikke nogen tilfældighed.

|||| Hjælpesætning 15.46

Lad $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ betegne et vilkårligt andengrads-polynomium uden førstegrads- og konstant-led. Så kan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ udtrykkes som en kvadratisk form på netop én måde – dvs. der findes netop én symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ sådan at:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P_{\mathbf{A}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad . \tag{15-107}$$

Den søgte matrix er:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}f(\mathbf{x}) \quad , \tag{15-108}$$

hvor $\mathbf{H}f(\mathbf{x})$ er (den konstante) Hesse-matrix for funktionen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

|||| Bevis

Vi nøjes her med tilfældet $n = 2$ og refererer til analysen af funktioner af to variable i eNote 18: Hvis $f(x, y)$ er et polynomium i to variable uden førstegrads- (og konstant-)led, altså en kvadratisk form i $(\mathbf{R}^2, \cdot)$, s er den søgte $\mathbf{A}$-matrix lige præcis (den konstante) Hesse-matrix for $f(x, y)$.

■

Det gælder generelt, hvis vi udvider definitionen af Hesse-matricer til funktioner af flere variable således: Lad $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ være en vilkårlig glat funktion af n variable i den oplagte betydning for funktioner af flere variable (end to). Så er de tilsvarende Hesse-matricer følgende symmetriske $(n \times n)$-matricer som indeholder alle de partielle afledede af anden orden for funktionen $f(\mathbf{x})$ evalueret i et vilkårligt punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{H}f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f''_{x_2 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_n x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad . \tag{15-109}$$

Specielt, hvis $f(x, y, z)$ er en glat funktion af tre variable (som i nedenstående eksempel 15.47) fs i ethvert punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y, z) & f''_{xy}(x, y, z) & f''_{xz}(x, y, z) \\ f''_{xy}(x, y, z) & f''_{yy}(x, y, z) & f''_{yz}(x, y, z) \\ f''_{xz}(x, y, z) & f''_{yz}(x, y, z) & f''_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad , \tag{15-110}$$

hvor vi eksplicit har benyttet os af symmetrien i Hesse-matricen, f.eks. $f''_{zx}(x,y,z) = f''_{xz}(x,y,z)$.

|||| Eksempel 15.47 Kvadratisk form med repræsenterende matrix

Lad $f(x,y,z)$ betegne følgende funktion af tre variable:

$$f(x,y,z) = x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 8\cdot x\cdot y + 4\cdot y\cdot z \quad . \tag{15-111}$$

Så er $f(x,y,z)$ en kvadratisk form $P_{\mathbf{A}}(x,y,z)$ med

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}f(x,y,z) = \frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{xy}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{xz}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-112}$$

Vi kan efterprøve 15.8.108 ved direkte udregning:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(x,y,z) &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 4\cdot y \\ 3\cdot y - 4\cdot x + 2\cdot z \\ z + 2\cdot y \end{bmatrix} \\ &= x\cdot(x - 4\cdot y) + y\cdot(3\cdot y - 4\cdot x + 2\cdot z) + z\cdot(z + 2\cdot y) \\ &= x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 8\cdot x\cdot y + 4\cdot y\cdot z \\ &= f(x,y,z) \quad . \end{aligned} \tag{15-113}$$

Som vist i afsnit 21.4 i eNote 18 spiller fortegnene på egenværdierne for Hesse-matricen en afgørende rolle nr vi analyserer og inspicerer en glat funktion $f(x,y)$ i og omkring et stationært punkt. Og da det netop igen er (den samme) Hesse-matrix der optræder i nærværende sammenhæng vil vi her knytte et par definitioner til denne fortegnsdiskussion – nu for generelle $(n\times n)$ Hesse-matricer, og dermed ogs for generelle kvadratiske former repræsenteret ved symmetriske matricer $\mathbf{A}$:

|||| Definition 15.48 Definitte og indefinitte symmetriske matricer

Vi lader $\mathbf{A}$ betegne en symmetrisk matrix. Lad $\mathbf{A}$ have de n reelle egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Så siger vi, at

1. $\mathbf{A}$ er ***positiv definit*** hvis alle egenværdierne λ_i er positive.
2. $\mathbf{A}$ er ***positiv semi-definit*** hvis alle egenværdierne λ_i er ikke-negative (hver enkelt er større end eller lig med 0).
3. $\mathbf{A}$ er ***negativ definit*** hvis alle egenværdierne λ_i er negative.
4. $\mathbf{A}$ er ***negativ semi-definit*** hvis alle egenværdierne λ_i er ikke-positive (hver enkelt er mindre end eller lig med 0).
5. $\mathbf{A}$ er ***indefinit*** hvis $\mathbf{A}$ hverken er positiv semi-definit eller negativ semidefinit.

Vi formulerer nu et intuitivt rimeligt resultat, der relaterer denne "definithed" til de *værdier*, som andengradspolynomiet $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ antager for forskelllige $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

|||| Sætning 15.49 Betydningen af positiv definithed

Hvis $\mathbf{A}$ er en symmetrisk positiv definit matrix, så er den kvadratiske form $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ positiv for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$.

|||| Bevis

Vi refererer til sætning 15.45 og kan derfra benytte det reducerede udtryk for den kvadratiske form:

$$P_{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_n) = \widetilde{P}_{\mathbf{A}}(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n) = \lambda_1 \cdot \widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n \cdot \widetilde{x}_n^2 \quad , \tag{15-114}$$

hvoraf det tydeligt se, at da $\mathbf{A}$ er positiv definit får vi $\lambda_i > 0$ for alle $i = 1, \cdots, n$ og så er $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, som jo svarer til, at ingen af koordinatsættene for $\mathbf{x}$ er $(0, \cdots, 0)$.

■

Tilsvarende sætninger kan formuleres for negativt definitte og indefinitte matricer, og de er oplagt nyttige ved funktionsundersøgelser, specielt ved undersøgelse af funktionsværdierne omkring stationære punkter, som behandlet i eNote 18.

15.9 Reduktion af andengrads-polynomier

Ved at reducere den kvadratiske form del af et andengrads-polynomium fås naturligvis et tilsvarende simplere andengradspolynomium – nu uden produktled. Vi ser på et par eksempler.

|||| Eksempel 15.50 Reduktion af andengrads-polynomium, to variable

Vi ser på følgende andengradspolynomium i to variable:

$$f(x,y) = 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y - 20 \cdot x + 40 \cdot y - 60 \tag{15-115}$$

Den del af polynomiet som kan beskrives ved en kvadratisk form er nu

$$P_{\mathbf{A}}(x,y) = 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y \quad , \tag{15-116}$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-117}$$

Netop denne matrix er diagonaliseret ved en positiv ortogonal substitution $\mathbf{Q}$ i eksempel 15.31: Egenvrdierne for $\mathbf{A}$ er $\lambda_1 = 20$ og $\lambda_2 = -5$ og

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor} \quad \varphi = -\arcsin(3/5) \quad . \tag{15-118}$$

Koordinatskiftet til de nye koordinater $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ foregår altså ved en rotation af det sædvanlige koordinatsystem med en vinkel på $-\arcsin(3/5)$.

Vi bruger reduktionssætningen 15.45 og får, at den kvadratiske form $P_{\mathbf{A}}(x,y)$ i de nye koordinater har følgende reducerede udtryk:

$$P_{\mathbf{A}}(x,y) = \widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 20 \cdot \widetilde{x}^2 - 5 \cdot \widetilde{y}^2 \quad . \tag{15-119}$$

Ved at indsætte dette reducerede udtryk for den kvadratiske form i polynomiet $f(x,y)$ får vi:

$$f(x,y) = 20 \cdot \widetilde{x}^2 - 5 \cdot \widetilde{y}^2 + (-20 \cdot x + 40 \cdot y - 60) \quad , \tag{15-120}$$

hvor vi klart nu blot mangler at udtrykke den sidste parentes ved hjælp af de nye koordinater. Det gøres ved hjælp af substitutionsmatricen $\mathbf{Q}$. Vi har jo den lineære sammenhæng mellem koordinaterne (x, y) og $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} \tag{15-121}$$

sådan at:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{5} \cdot (4 \cdot \widetilde{x} + 3 \cdot \widetilde{y}) \\ y &= \frac{1}{5} \cdot (-3 \cdot \widetilde{x} + 4 \cdot \widetilde{y}) \quad . \end{aligned} \tag{15-122}$$

Vi indsætter disse omskrivninger af x og y i (15.9.120) og får:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 20 \cdot \widetilde{x}^2 - 5 \cdot \widetilde{y}^2 + (-4 \cdot (4 \cdot \widetilde{x} + 3 \cdot \widetilde{y}) + 8 \cdot (-3 \cdot \widetilde{x} + 4 \cdot \widetilde{y}) - 60) \\ &= 20 \cdot \widetilde{x}^2 - 5 \cdot \widetilde{y}^2 - 40 \cdot \widetilde{x} + 20 \cdot \widetilde{y} - 60 \quad . \end{aligned} \tag{15-123}$$

Vi har dermed reduceret udtrykket for $f(x, y)$ til følgende udtryk i de nye koordinater $\widetilde{x}$ og $\widetilde{y}$), som er fremkommet ved en passende drejning af det sædvanlige koordinatsystem:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 11 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 24 \cdot x \cdot y - 20 \cdot x + 40 \cdot y - 60 \\ &= 20 \cdot \widetilde{x}^2 - 5 \cdot \widetilde{y}^2 - 40 \cdot \widetilde{x} + 20 \cdot \widetilde{y} - 60 \\ &= \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \quad . \end{aligned} \tag{15-124}$$

Bemærk igen, at *reduktionen* i eksemplet 15.50 består i, at det reducerede andengradspolynomium $\widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ ikke indeholder noget produktled af formen $\widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$. Den reduktionsteknik og det udbytte af det store arbejde bliver lidt tydeligere når vi ser på et andengradspolynomium i tre variable.

|||| Eksempel 15.51 Reduktion af andengrads-polynomium, tre variable

I eksempel 15.33 har vi diagonaliseret den matrix $\mathbf{A}$, der repræsenterer den kvadratiske form i følgende andengradspolynomium i tre variable:

$$f(x, y, z) = 7 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2 - 4 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y \cdot z - 2 \cdot x + 20 \cdot y - 10 \cdot z - 18 \quad . \tag{15-125}$$

Dette polynomium reduceres til følgende andengradspolynomium i de nye variable opnået efter samme forskrift som i eksempel 15.50:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \\ &= \quad 9 \cdot \widetilde{x}^2 + 6 \cdot \widetilde{y}^2 + 3 \cdot \widetilde{z}^2 + 18 \cdot \widetilde{x} - 12 \cdot \widetilde{y} + 6 \cdot \widetilde{z} - 18 \end{aligned} \tag{15-126}$$

med den positive ortogonale substitution

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad . \tag{15-127}$$

Substitutionsmatricen $\mathbf{Q}$ kan faktoriseres til et produkt af akserotationsmatricer således:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_z(w) \cdot \mathbf{R}_y(v) \cdot \mathbf{R}_x(u) \quad , \tag{15-128}$$

hvor rotationsvinklerne er henholdsvis:

$$u = \frac{\pi}{4} \quad , \quad v = -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \quad , \quad \text{og} \quad w = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \quad , \tag{15-129}$$

Ved at rotere koordinatsystemet og benytte de nye koordinater $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, og $\widetilde{z}$ opnår vi den reduktion af polynomiet $f(x,y,z)$ at der i polynomiet $\widetilde{f}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ ikke optræder produktled mens der i $f(x,y,z)$ optræder to produktled, med henholdsvis $x \cdot y$ og $y \cdot z$

15.10 Opsummering

Hovedresultatet i denne eNote er at symmetriske $(n \times n)$-matricer kan diagonaliseres ved en positiv ortogonal substitutionsmatrix $\mathbf{Q}$. Vi har brugt den sætning til at reducere andengrads-polynomier i n variable – dog især for $n = 2$ og $n = 3$.

- En symmetrisk $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ har præcis n reelle egenværdier $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
- I vektorrummet $\mathbb{R}^n$ indføres et skalarprodukt ved udvidelse af det sædvanlige skalarprodukt i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, og vi refererer til dette skalarprodukt, når vi skriver $(\mathbb{R}^n, \bullet)$. Hvis $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ med hensyn til den sædvanlige basis e i $\mathbb{R}^n$, så er
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \sum_i^n a_i \cdot b_i \quad . \tag{15-130}$$
- Længden, normen, af en vektor $\mathbf{a}$ er givet ved
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad . \tag{15-131}$$
- Cauchy-Schwarz' ulighed gælder for alle vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i $(\mathbb{R}^n, \bullet)$
$$|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq |\,\mathbf{a}\,|\;|\,\mathbf{b}\,| \ , \tag{15-132}$$
og lighedstegnet gælder hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært afhængige.
- Vinklen $\theta \in [0, \pi]$ mellem to egentlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ er bestemt ved
$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \quad . \tag{15-133}$$
- To egentlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ er ortogonale hvis $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$.
- En matrix $\mathbf{Q}$ er ortogonal hvis søjlevektorerne er parvis ortogonale og hver har længden 1 med hensyn til det indførte skalarprodukt. Det svarer præcis til at
$$\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \tag{15-134}$$
eller ækvivalent:
$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top \quad . \tag{15-135}$$

- Spektralsætningen: Hvis $\mathbf{A}$ er symmetrisk, så findes en positiv ortogonal substitutionsmatrix $\mathbf{Q}$ således at
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad , \tag{15-136}$$
hvor $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

- Enhver positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ er en substitutionsmatrix (basisskiftematrix) der roterer koordinatsystemet. Den kan for $n = 3$ faktoriseres i tre akserotationsmatricer:
$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_z(w) \cdot \mathbf{R}_y(v) \cdot \mathbf{R}_x(u) \quad , \tag{15-137}$$
for passende valg af drejningsvinkler u, v, og w.

- For $n = 3$: Ved rotation af koordinatsystemet, dvs. ved brug af en positiv ortogonal koordinatskiftematrix $\mathbf{Q}$, kan den kvadratiske form $P_{\mathbf{A}}(x, y, z)$ (som er et andengradspolynomium uden lineære led og uden konstantled) udtrykkes ved en kvadratisk form $\widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ i de nye koordinater $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, og $\widetilde{z}$ således at
$$P_{\mathbf{A}}(x, y, z) = \widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \quad \text{for alle } (x, y, z), \tag{15-138}$$
og således at den reducerede kvadratiske form $\widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ ikke indeholder noget produktled af typen $\widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$, $\widetilde{x} \cdot \widetilde{z}$, eller $\widetilde{y} \cdot \widetilde{z}$:
$$\widetilde{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \lambda_1 \cdot \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \cdot \widetilde{y}^2 + \lambda_3 \cdot \widetilde{z}^2 \quad , \tag{15-139}$$
hvor λ_1, λ_2, og λ_3 er de tre reelle egenværdier for $\mathbf{A}$.