eNote 12

Lineære Afbildninger

Denne eNote undersøger afbildninger mellem vektorrum af en bestemt type, nemlig lineære afbildninger. Det vises, at kernen og billedrummet for lineære afbildninger er underrum i henholdsvis definitionsrummet og dispositionsrummet. Når definitionsrummet og dispositionsrummet har endelig dimension, og der er valgt en basis for hver af dem, kan spørgsmål vedrørende lineære afbildninger standardiseres. I så fald kan en lineær afbildning udtrykkes som et produkt mellem en såkaldt afbildningsmatrix og koordinaterne for de vektorer, der ønskes afbildet. Da afbildningsmatricer afhænger af de to valgte baser, beskrives det, hvordan afbildningsmatricerne ændres, når en af baserne eller de begge udskiftes med andre. Forudsætninger for eNoten er viden om lineære ligningssystemer, se eNote 6, matrixalgebra, se eNote 7, og vektorrum, se eNote 11.

Opdateret 05.11.21 *af Karsten Schmidt.*

12.1 Om afbildninger

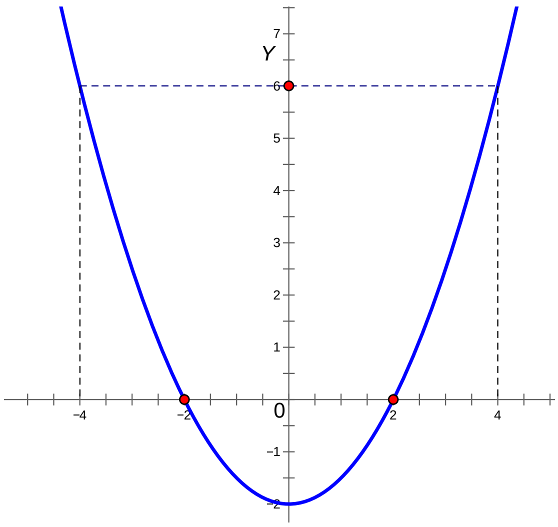
En *afbildning* er en forskrift f, der til et element i en mængde A knytter et element i en mængde B, og forskriften skrives $f : A \to B$. A kaldes *definitionsmængden* og B *dispositionsmængden*.

CPR-nummerering kan betragtes som en afbildning af mængden af statsborgere i Danmark ind i $\mathbb{R}^{10}$. Hvert af de ti cifre i CPR-nummeret tilhører nemlig det reelle talrum. Man siger, at der er en 10-dobbelt uendelighed af elementer i dispositionsmængden $\mathbb{R}^{10}$. Men selvom hvert ciffer *tilhører* det reelle talrum, kan de hver især ikke antage *alle* reelle tal (fx bruges der ikke negative tal). Derfor bliver der kun benyttet en langt mindre delmængde af dette meget store 10-dimensionelle talrum, nemlig ca. fem millioner! De elementer i $\mathbb{R}^{10}$, som på et givet tidspunkt er i brug, kaldes *billedmængden* eller *værdimængden* for CPR-afbildningen.

En enkel type af afbildninger er elementære funktioner af typen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pilen $\to$ udtrykker her, at f til ethvert reelt tal x knytter et andet reelt tal $y = f(x)$. Betragt for eksempel den kontinuerte funktion

$$x \to f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\,. \tag{12-1}$$

Her har forskriften form af en regneprocedure: Sæt tallet i anden, gang det med en halv, og træk 2 fra. Reelle funktioner har en stor fordel i, at deres graf $\{\,(x,y)\,|\,y = f(x)\,\}$ kan tegnes og give et godt overblik over afbildningen, se Figur 12.1.



Figur 12.1: Graf for funktion $x \to \frac{1}{2}x^2 - 2$

Typiske spørgsmål i forbindelse med elementære funktioner kommer igen i forbindelse med mere avancerede afbildninger. Lad os derfor indledningsvis kigge på nogle af de vigtigste opgavetyper:

1. *Bestem nulpunkterne for f*. Det betyder, at vi skal finde alle x, for hvilke $f(x) = 0$. I eksemplet herover er svaret $x = -2$ og $x = 2$.

2. *Løs for et givet b ligningen $f(x) = b$*. For $b = 6$ er der i eksemplet herover de to løsninger $x = -4$ og $x = 4$.

3. *Bestem billedmængden (eller værdimængden) for f*. Vi skal finde alle de b, for hvilke ligningen $f(x) = b$ har en løsning. I eksemplet er billedmængden $[\,-2;\infty\,[$.

Alle tre ovenstående resultater aflæses tydeligt af grafen på Figur 12.1.

I denne eNote ser vi på definitionsmængder og dispositionsmængder som er vektorrum. De kaldes derfor definitions*rum* og dispositions*rum*. En afbildning $f : V \to W$ knytter til enhver vektor $\mathbf{x}$ i *definitionsrummet* V en vektor $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ i *dispositionsrummet* W. Alle de vektorer i W, som er billede ved f af en vektor i V, udgør billedmængden. Hvis f er en *lineær* afbildning (emnet for denne eNote) er billedmængden et underrum i dispositionsrummet (jf. sætning12.11), og vi kalder i så tilfælde billedmængden for et billed*rum*.

|||| Eksempel 12.1 Afbildning fra vektorrum til vektorrum

En afbildning $g : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ er givet ved

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\,\mathbf{X}^\top . \tag{12-2}$$

Der gælder for eksempel, at

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

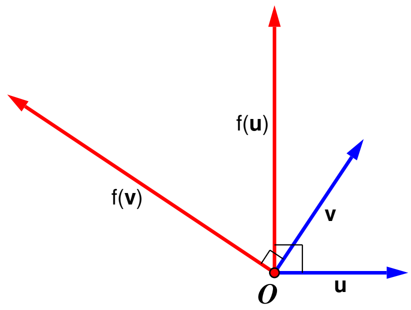
Definitionsrummet er $\mathbb{R}^{2\times 3}$, dispositionsrummet er $\mathbb{R}^{2\times 2}$, og det ses at $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ tilhører billedmængden. **Opgave:** Vis at billedmængden i tilfældet g ikke er et billedrum.

12.2 Eksempler på lineære afbildninger i planen

Vi undersøger i det følgende en afbildning f, der har mængden af geometriske vektorer i planen som både definitionsrum og dispositionsrum. Denne afbildning f er givet ved

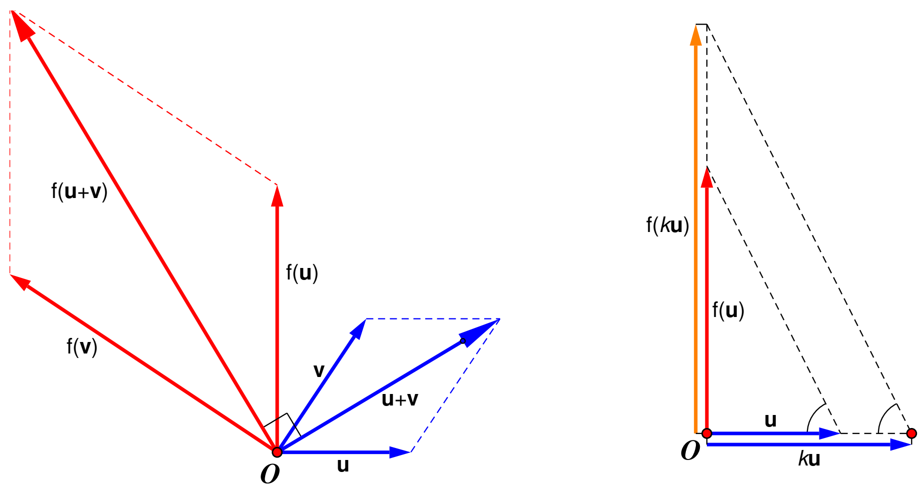
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\,\hat{\mathbf{x}}\,, \tag{12-3}$$

hvor vi ved $\hat{\mathbf{x}}$ forstår *tværvektoren* til en given geometrisk vektor $\mathbf{x}$. Til enhver vektor i planen er der altså knyttet dens tværvektor multipliceret (forlænget) med 2. På Figur 12.2 er der tegnet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og deres billeder $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$.



Figur 12.2: To vektorer (blå) og deres billeder (røde)

Figur 12.2 giver anledning til et par interessante spørgsmål: Hvordan afbildes sumvektoren $\mathbf{u}+\mathbf{v}$? Mere præcist: Hvordan forholder billedvektoren $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ sig til de to billedvektorer $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$? Og hvad er relationen mellem billedvektorerne $f(k\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{u})$, når k er et givet reelt tal?



Figur 12.3: Konstruktion af $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ og $f(k\mathbf{u})$.

Som antydet på figur 12.3 opfylder f to meget enkle regler:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \;\text{ og }\; f(k\mathbf{u}) = k\,f(\mathbf{u})\,. \tag{12-4}$$

Ved hjælp af de velkendte regneregler for tværvektorer

1. $\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}$ og

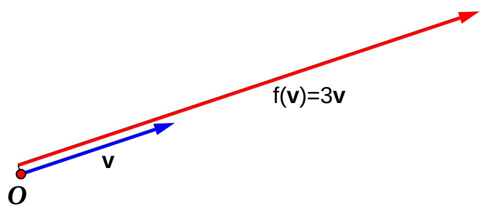
2. $\widehat{k\mathbf{u}} = k\hat{\mathbf{u}}$

kan vi nu bekræfte påstanden (12-4) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= 2\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = 2(\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}) = 2\hat{\mathbf{u}}+2\hat{\mathbf{v}} \\ &= f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) \\ f(k\mathbf{u}) &= 2\widehat{k\mathbf{u}} = 2k\hat{\mathbf{u}} = k(2\hat{\mathbf{u}}) \\ &= k\,f(\mathbf{u})\,. \end{aligned}$$

|||| Opgave 12.2

En afbildning f_1 af plane vektorer er givet ved $f_1(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$, se figur 12.4.

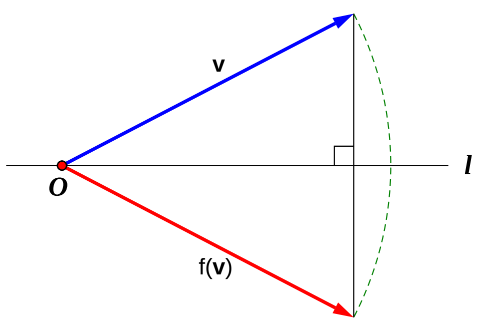


Figur 12.4: Skalering af vektor

Tegn en figur, der illustrerer, at f_1 opfylder reglerne (12-4) .

|||| Opgave 12.3

I planen er der givet en linje l gennem origo. En afbildning f_2 spejler vektorer afsat ud fra origo i l , se figur 12.5.

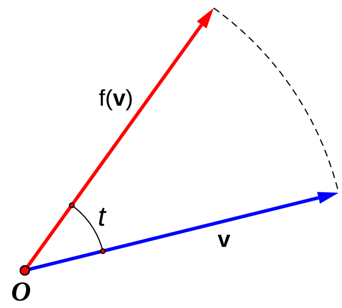


Figur 12.5: Spejling af vektor

Tegn en figur, der illustrerer, at f_2 opfylder reglerne (12-4) .

|||| Opgave 12.4

En afbildning f_3 drejer vektorer afsat ud fra origo vinklen t omkring origo mod uret, se figur 12.6.



Figur 12.6: Drejning af vektor

Tegn en figur, der demonstrerer, at f_3 opfylder reglerne (12-4) .

Alle afbildninger, der har været berørt i dette afsnit, er *lineære*, fordi de opfylder (12-4) . Vi tager nu spørgsmålet om lineære afbildninger mellem vektorrum op til generel behandling.

12.3 Lineære afbildninger

|||| Definition 12.5 Lineær afbildning

Lad V og W være to vektorrum over $\mathbb{L}$, og lad $\mathbb{L}$ betegne enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. En afbildning $f : V \rightarrow W$ kaldes *lineær*, hvis den for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og alle skalarer $k \in \mathbb{L}$ opfylder de følgende to *linearitetsbetingelser*:

L_1: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

L_2: $f(k\mathbf{u}) = k\, f(\mathbf{u})$.

V kaldes *definitionsrummet* og W *dispositionsrummet* for f .

Ved at sætte $k = 0$ i linearitetsbetingelsen L_2 i definition 12.5 ses det, at

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,. \tag{12-5}$$

Der gælder med andre ord for enhver lineær afbildning $f : V \to W$, at nul-vektoren i V afbildes i nul-vektoren i W.

Billedet af en linearkombination bliver på en meget enkel måde en linearkombination af billederne af de vektorer, der indgår:

$$f(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_p\mathbf{v}_p) = k_1 f(\mathbf{v}_1) + k_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_p f(\mathbf{v}_p)\,. \tag{12-6}$$

Dette resultat fås ved gentagen anvendelse af L_1 og L_2.

Bemærk ligheden mellem *linearitetsbetingelserne* L_1 og L_2 i definition 12.5 og *stabilitetskravene* I og II i sætning 11.1. Men husk også forskellen: linearitetsbetingelserne er til at teste, *om en afbildning er liner*, mens stabilitetskravene er til at teste, *om et rum er et vektorrum*.

|||| Eksempel 12.6 Lineær afbildning

En afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved forskriften

$$f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2, x_1 + x_2)\,. \tag{12-7}$$

$\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^4$ er reelle vektorrum, og vi undersøger, om f er lineær. Vi tester først venstresiden VS og højresiden HS af L_1 med vektorerne $(1,2)$ og $(3,4)$:

$$\begin{aligned} \text{VS}: &\quad f(\,(1,2) + (3,4)\,) = f(4,6) = (0,4,6,10)\,. \\ \text{HS}: &\quad f(1,2) + f(3,4) = (0,1,2,3) + (0,3,4,7) = (0,4,6,10)\,. \end{aligned}$$

VS $=$ HS, så L_1 er opfyldt i dette tilfælde. Dernæst testes L_2 med vektoren (2,3) og skalaren 5:

$$\begin{aligned} \text{VS}: &\quad f(\,5 \cdot (2,3)\,) = f(10,15) = (0,10,15,25)\,. \\ \text{HS}: &\quad 5 \cdot f(2,3) = 5 \cdot (0,2,3,5) = (0,10,15,25)\,. \end{aligned}$$

Igen er VS $=$ HS. Undersøgelsen tyder umiddelbart på, at f er lineær, men kun for disse eksempler. Dette vises nu generelt. Først testes L_1:

$$\begin{aligned}
\text{VS}: \quad f(\,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\,) &= f(x_1+y_1,x_2+y_2)\\
&= (0,x_1+y_1,x_2+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)\\
\text{HS}: \quad f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) &= (0,x_1,x_2,x_1+x_2)+(0,y_1,y_2,y_1+y_2)\\
&= (0,x_1+y_1,x_2+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)\,.
\end{aligned}$$

Dernæst testes L_2:

$$\begin{aligned}
&\text{VS}: \quad f(\,k\cdot(x_1,x_2)\,) = f(k\cdot x_1,k\cdot x_2) = (0,k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_1+k\cdot x_2)\\
&\text{HS}: \quad k\cdot f(x_1,x_2) = k\cdot(0,x_1,x_2,x_1+x_2) = (0,k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_1+k\cdot x_2)\,.
\end{aligned}$$

Højre- og venstreside er ens i begge tilfælde, så f opfylder begge linearitetsbetingelser og er derfor lineær.

|||| Eksempel 12.7 Afbildning, som ikke er lineær

I eksempel 12.1 betragtede vi afbildningen $g:\mathbb{R}^{2\times 3}\rightarrow\mathbb{R}^{2\times 2}$ givet ved

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\,\mathbf{X}^{\top}\,. \tag{12-8}$$

At denne afbildning *ikke* er lineær, kan man dokumentere ved at finde blot ét eksempel, hvor enten L_1 eller L_2 ikke gælder. Nedenfor gives et sådan eksempel på en matrix $\mathbf{X}$, der med en skalar 2 ikke opfylder $g(2\mathbf{X}) = 2\,g(\mathbf{X})$:

$$\text{VS}: \quad g\left(2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix},$$

men

$$\text{HS}: \quad 2\,g\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Derfor opfylder g ikke linearitetsbetingelse L_2, og g er ikke lineær.

|||| Eksempel 12.8 Lineær afbildning

Der er givet en afbildning $f:P_2(\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}$ ved forskriften

$$f\big(\,P(x)\,\big) = P'(1)\,. \tag{12-9}$$

Til ethvert andengradspolynomium er altså knyttet dets tangenthældning i $x=1$. Er f en lineær afbildning?

Et vilkårligt andengradspolynomium $P(x)$ kan opskrives ved $P(x) = ax^2 + bx + c$, hvor a, b og c er reelle konstanter. Da $P'(x) = 2ax + b$, må højresiden af afbildningen være $P'(1) = 2a \cdot 1 + b = 2a + b$:

$$f\big(\,P(x)\,\big) = 2a + b\,.$$

Hvis vi sætter $P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ og $P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, får vi

$$\begin{aligned} f\big(\,P_1(x) + P_2(x)\,\big) &= f\big(\,(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\,\big) \\ &= \big(\,2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\big) \\ &= (2a_1 + b_1) + (2a_2 + b_2) \\ &= f\big(\,P_1(x)\,\big) + f\big(\,P_2(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Endvidere gælder for ethvert reelt tal k og ethvert andengradspolynomium $P(x)$:

$$\begin{aligned} f\big(\,k \cdot P(x)\,\big) &= f\big(\,k \cdot ax^2 + k \cdot bx + k \cdot c\,\big) \\ &= (2k \cdot a + k \cdot b) = k \cdot (2a + b) \\ &= k \cdot f\big(\,P(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Det er hermed vist, at f opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2, og at f dermed er en lineær afbildning.

|||| Opgave 12.9

Ved $C^\infty(\mathbb{R})$ forstås vektorrummet, som består af alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der kan differentieres et vilkårligt antal gange. Et eksempel (blandt uendeligt mange) er sinus-funktionen. Betragt afbildningen $\mathrm{D} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, som til en funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ knytter dens afledte:

$$\mathrm{D}\big(\,f(x)\,\big) = f'(x)\,.$$

Vis, at D er en lineær afbildning.

12.4 Kerne og billedrum

Nulpunkterne eller *rødderne* for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal x, som opfylder $f(x) = 0$. Det tilsvarende begreb for lineære afbildninger kaldes *kernen* og betegnes $\ker(f)$.

Billedmængden (eller værdimængden) for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal b, hvortil der findes et reelt tal x således, at $f(x) = b$. Som nævnt tidligere kaldes det tilsvarende begreb for lineære afbildninger *billedrummet*. Lad os straks retfærdiggøre, at ordet *rum* optræder her. Det er nemlig således, at kernen er et underrum i definitionsrummet, mens billedrummet er et underrum i dispositionsrummet. Dette viser vi nu.

|||| Definition 12.10 Lineær ligning. Kerne og billedrum

Givet to vektorrum V og W. En ligning på formen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \tag{12-10}$$

hvor $f : V \to W$ er en lineær afbildning og $\mathbf{b} \in W$ kaldes en *lineær ligning*.

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning.
Ved *kernen* for f forstås løsningsmængden for den lineære ligning $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

$$\ker(f) = \{\, \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in W \,\} \,. \tag{12-11}$$

Ved *billedrummet* $f(V)$ for f forstås mængden af vektorer $\mathbf{b} \in W$ for hvilke den lineære ligning $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ har mindst én løsning:

$$f(V) = \{\, \mathbf{b} \in W \mid \text{Der findes mindst ét } \mathbf{x} \in V\,,\ \text{hvor } f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \,\} \,. \tag{12-12}$$

|||| Sætning 12.11 Kernen og billedrummet er underrum

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning. Der gælder:

1. Kernen for f er et underrum i V.

2. Billedrummet $f(V)$ er et underrum i W.

|||| Bevis

Første punkt
Vi skal ifølge sætning 11.47 vise, at kernen for f opfylder stabilitetskravene. Antag, at $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ og $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, og at k er en vilkårlig skalar. Da der (ved brug af L_1, da vi forudsætter, at f er lineær) gælder:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

er kernen for f stabil med hensyn til addition. Da der endvidere (med brug af L_2) gælder:

$$f(k\mathbf{x}_1) = k\,f(\mathbf{x}_1) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

er kernen for f også stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det dermed vist, at kernen for f er et underrum i V.

Andet punkt
Vi skal vise, at billedrummet $f(V)$ opfylder stabilitetskravene. Antag, at vektorerne $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ tilhører billedrummet, $\mathbf{b}_1 \in f(V)$ og $\mathbf{b}_2 \in f(V)$, og at k er en vilkårlig skalar. Der findes ifølge definition 12.10 vektorer $\mathbf{x}_1 \in V$ og $\mathbf{x}_2 \in V$, som opfylder $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1$ og $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2$. Vi skal vise, at der findes et $\mathbf{x} \in V$, så $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Det gør der, da vi blot kan tage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, for så gælder:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\,.$$

Hermed er det vist, at $f(V)$ er stabil med hensyn til addition. Vi skal nu på lignende måde vise, at der findes et $\mathbf{x} \in V$, så $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{b}_1$. Vi vælger $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_1$, så der gælder

$$f(\mathbf{x}) = f(k\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1) = k\mathbf{b}_1\,,$$

hvoraf det fremgår, at $f(V)$ er stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det vist, at begge stabilitetskrav er opfyldt, så $f(V)$ er et underrum i W.

■

Men hvorfor er det så interessant, at kernen og billedrummet for en lineær afbildning er underrum? Svaret er, at det bliver enklere at beskrive dem, når vi ved, at de har vektorrumsegenskaber, og dermed på forhånd kender deres struktur. Særligt elegant er det, når vi kan bestemme kernen og billedrummet ved at angive en *basis* for dem. Dette forsøger vi i det næste eksempel.

|||| Eksempel 12.12 Bestemmelse af kerne og billedrum

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved forskriften

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3\,, -x_1 - 2x_2 - x_3)\,. \tag{12-13}$$

Bestem kernen $\ker(f)$ og billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$ for f.

Det er givet, at f er lineær, så det behøver vi ikke at undersøge.

Bestemmelse af kernen

Vi skal løse ligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}14)$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Det har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser, at ligningssystemet har løsningsmængden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer. Vi kan derfor konkludere, at kernen for f er et 2-dimensionalt underrum i definitionsrummet $\mathbb{R}^3$, som kan beskrives ved en basis.

$$\text{En basis for kernen er : } \big(\,(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\,\big)\,.$$

Der er altså en hel plan af vektorer i rummet, som ved indsættelse i forskriften giver billedet $\mathbf{0}$. Denne basis angiver dem alle.

Bestemmelse af billedrummet

Vi skal finde alle de resulterende vektorer (billeder) $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, for hvilke følgende ligning har en løsning:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}15)$$

Bemærk, at det ikke er x_1, x_2 og x_3, vi leder efter, som vi ellers plejer i sådan et ligningssystem. Derimod er det højresidens b_1 og b_2, som vi vil bestemme netop *i de tilfælde, hvor der ér løsninger*! For når systemet har løsninger for en bestemt højreside, så *må* denne højreside være med i billedmængden, som vi netop leder efter.

Det lineære ligningssystem har totalmatricen og trappeformen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ -1 & -2 & -1 & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}.$$

Hvis $b_1 + b_2 = 0$, altså hvis $b_1 = -b_2$, har ligningssystemet uendeligt mange løsninger. Hvis derimod $b_1 + b_2 \neq 0$, er der ingen løsninger. Alle de $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, som er billeder af mindst ét $\mathbf{x} \in R^3$, *skal* altså opfylde $b_1 = -b_2$. Vi kan betragte b_2 som en fri parameter, og løsningsmængden kan opskrives som

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer, at $f(V)$ er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$, som kan beskrives ved en basis.

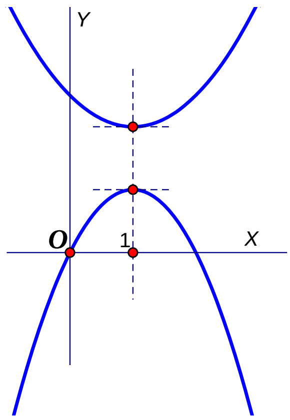
$$\text{En basis for billedrummet er : } \big((-1,1) \big) .$$

|||| Opgave 12.13 Bestemmelse af kerne og billedrum

I eksempel 12.8 blev det vist, at afbildningen $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$f\big(P(x)\big) = P'(1) \tag{12-16}$$

er lineær. Kernen for f består af alle andengradspolynomier, der har billedet 0, altså alle dem, der opfylder $P'(1) = 0$. Grafen for to, der opfylder dette, er vist på figuren.



Bestem kernen for f.

I eNote 6 er sammenhængen mellem løsningsmængden for et inhomogent lineært ligningssystem og løsningsmængden for det tilsvarende homogene ligningssystem præsenteret i struktursætningen 6.37. Vi viser nu at der gælder en tilsvarende sammenhæng for alle lineære ligninger.

|||| Sætning 12.14 Struktursætning for lineære ligninger

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning og $\mathbf{b}$ en vilkårlig egentlig vektor i W. Lad endvidere $\mathbf{x}_0$ være en vilkårlig (såkaldt partikulær) løsning til den inhomogene lineære ligning

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,. \tag{12-17}$$

Da er den fuldstændige løsning L_{inhom} til den lineære ligning givet ved

$$L_{inhom} = \left\{\, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \;\middle|\; \mathbf{x}_1 \in \ker(f) \,\right\}\,, \tag{12-18}$$

eller kort skrevet

$$L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + \ker(f)\,. \tag{12-19}$$

|||| Bevis

Sætningen rummer to påstande. Den ene er at summen af $\mathbf{x}_0$ og en vilkårlig vektor fra $\ker(f)$ tilhører L_{inhom}. Den anden er at en vilkårlig vektor fra L_{inhom} kan skrives som summen af $\mathbf{x}_0$ og en vektor fra $\ker(f)$. Vi viser de to påstande hver for sig:

1. Antag $\mathbf{x}_1 \in \ker(f)$. Da gælder med brug af linearitetsbetingelse L_1 :

   $$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \tag{12-20}$$

   hvorved vist at også $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ er en løsning til (12-17).

2. Antag at $\mathbf{x}_2 \in L_{inhom}$. Da gælder med brug af linearitetsbetingelse L_1 :

   $$f(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 \in \ker(f)\,. \tag{12-21}$$

   Der findes dermed en vektor $\mathbf{x}_1 \in \ker(f)$ som opfylder

   $$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \tag{12-22}$$

   hvorved vi har opskrevet $\mathbf{x}_2$ på den ønskede form. Beviset er hermed fuldført.

■

|||| Opgave 12.15

Betragt afbildningen $\mathrm{D} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ fra Opgave 12.9 som til en funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ knytter dens afledte:

$$\mathrm{D}(\,f(x)\,) = f'(x)\,.$$

Opskriv den fuldstændige løsning til den inhomogene lineære ligning

$$\mathrm{D}(f(x)) = x^2$$

og fortolk den i lyset af struktursætningen.

12.5 Afbildningsmatrix

Alle lineære afbildninger fra et endeligt-dimensionalt definitionsrum V til et endeligt dispositionsrum W lader sig beskrive ved hjælp af en *afbildningsmatrix*. Forudsætningen er blot, at der vælges en basis for både V og W, og at vi overgår fra vektorregning til regning med vektorernes koordinater med hensyn til de valgte baser. Den store fordel ved dette setup er, at vi kan opstille generelle regnemetoder for alle lineære afbildninger mellem endeligt-dimensionale vektorrum. Det ser vi på senere i afsnit 12.6. Men nu drejer det sig om, hvordan man *opstiller* afbildningsmatricer.

Lad $\mathbf{A}$ være en reel eller kompleks $(m \times n)$-matrix. Vi betragter en afbildning $f : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^m$, som er beskrevet ved et matrix-vektorprodukt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,. \tag{12-23}$$

Ved at benytte regneregler for matrixprodukt, se sætning 7.13, opnår vi for ethvert valg af $\mathbf{x}_1\,,\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ og enhver skalar k:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$

$$f(k\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\,(k\mathbf{x}_1) = k(\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1)\,.$$

Vi ser, at afbildningen opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2. Enhver afbildning af formen (12-23) er derfor lineær.

|||| Eksempel 12.16 Matrix-vektor produkt som lineær afbildning

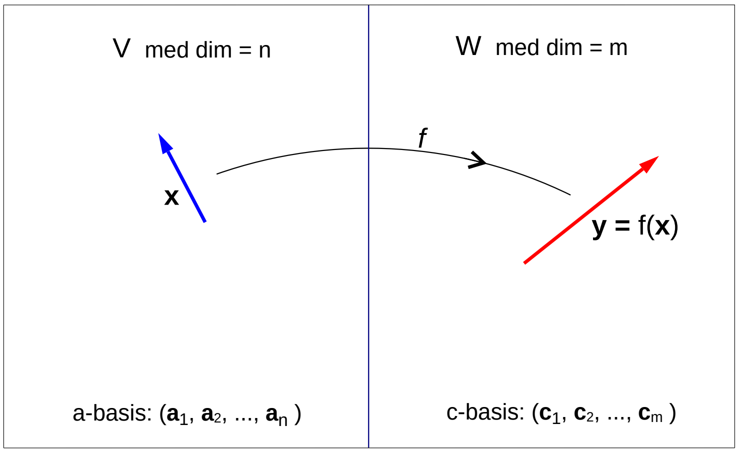
Udtrykket

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

angiver en lineær afbildning fra vektorrummet $\mathbb{R}^2$ til vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

Men også det modsatte gælder: Enhver lineær afbildning mellem endeligt-dimensionale vektorrum kan skrives som et matrix-vektorprodukt på formen (12-23), hvis vi erstatter $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ med deres koordinater med hensyn til en valgt basis i definitionsrummet henholdsvis dispositionsrummet. Dette viser vi i det følgende.

Vi betragter en lineær afbildning $f : V \to W$, hvor V er et n-dimensionalt og W et m-dimensionalt vektorrum, se figur 12.8.



Figur 12.8: Lineær afbildning

For V er der valgt en basis a og for W en basis c. Det betyder, at en given vektor $\mathbf{x} \in V$ kan skrives som en unik linearkombination af a-basisvektorerne, og at billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ kan skrives som en unik linearkombination af c-basisvektorerne:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 + \cdots + y_m\mathbf{c}_m \,.$$

Det betyder, at $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er koordinatsæt for $\mathbf{x}$ med hensyn til a-basis, og at $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ er koordinatsæt for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis.

Vi stiller nu spørgsmålet: Hvordan kan vi beskrive relationen mellem a-koordinatvektoren for vektor $\mathbf{x} \in V$ og c-koordinatvektoren for billedvektoren $\mathbf{y}$? Vi er med andre ord på jagt efter relationen mellem

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$ skal omformes til ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y}$ ved en lineær afbildning f. Denne relation udvikler vi igennem de følgende omskrivninger, hvor vi først ved hjælp af L_1 og L_2 får opskrevet $\mathbf{y}$ som en linearkombination af billederne af a-vektorerne:

$$ \begin{aligned} \mathbf{y} &= f({}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}) \\ &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n)\,. \end{aligned} $$

Herefter fortsætter vi ved at undersøge koordinatvektoren for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis, idet vi først bruger koordinatsætningen, se sætning 11.34, og derefter definitionen på matrixvektor-produkt, se definition 7.7.

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} &= {}_{\mathrm{c}}\big(x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n)\big) \\ &= x_1\,{}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) + x_2\,{}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n\,{}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_n) \\ &= \big[\,{}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_n)\,\big]\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,. \end{aligned} $$

Matricen $\big[\,{}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_n)\,\big]$ i den sidste ligning kaldes *afbildningsmatricen* for f med hensyn til a-basis i V og c-basis i W.

Vi har hermed opnået dette vigtige resultat: *Koordinatvektoren* ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y}$ *kan findes ved, at man ganger afbildningsmatricen med koordinatvektoren* ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$. En afbildning kan dermed gennemføres blot ved et matrix-vektorprodukt! Resultaterne opsummerer vi nu i det følgende.

|||| Definition 12.17 Afbildningsmatrix

Lad $f: V \rightarrow W$ være en lineær afbildning fra et n-dimensionalt vektorrum V til et m-dimensionalt vektorrum W. Ved *afbildningsmatricen* for f med hensyn til basis a i V og basis c i W forstås $(m \times n)$-matricen

$$ {}_{c}\mathbf{F}_{a} = \left[\, {}_{c}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_2) \quad \cdots \quad {}_{c}f(\mathbf{a}_n) \,\right] . \tag{12-24}$$

Afbildningsmatricen for f består dermed af koordinatvektorerne med hensyn til basis c for billederne af de n basisvektorer i basis a.

Bemærk, at der benyttes samme notation for en afbildningsmatrix, ${}_{c}\mathbf{F}_{a}$, som for en basisskiftematrix, ${}_{c}\mathbf{M}_{a}$. Mens en basisskiftematricen består af *a-basisvektorerne i c-koordinater*, består afbildningsmatricen af *a-basisvektorernes billeder i c-koordinater*.

Hovedopgaven for en afbildningsmatrix er naturligvis at kunne bestemme billeder i W af vektorer i V, og den legitimeres af den følgende sætning, som er en opsummering af undersøgelserne ovenfor.

|||| Sætning 12.18 Hovedsætning om afbildningsmatrix

Lad V være et n-dimensionalt vektorrum med valgt basis a og W et m-dimensionalt vektorrum med valgt basis c.

1. For en lineær afbildning $f: V \rightarrow W$ gælder, at hvis $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er billedet af en vilkårlig vektor $\mathbf{x} \in V$, så gælder der:

$$ {}_{c}\mathbf{y} = {}_{c}\mathbf{F}_{a}\, {}_{a}\mathbf{x} \,, \tag{12-25}$$

   hvor ${}_{c}\mathbf{F}_{a}$ er afbildningsmatricen for f med hensyn til basis a i V og basis c i W.

2. Antag omvendt, at billederne $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ for en afbildning $g: V \rightarrow W$ kan fås på koordinatform ved

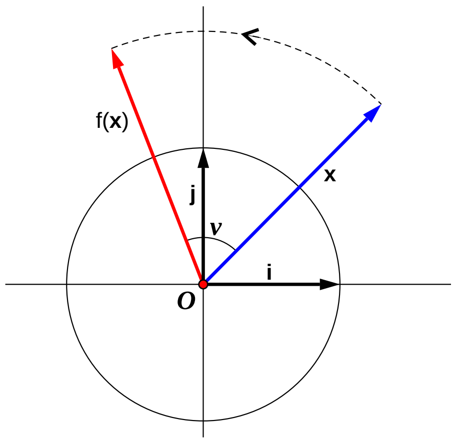
$$ {}_{c}\mathbf{y} = {}_{c}\mathbf{G}_{a}\, {}_{a}\mathbf{x} \,, \tag{12-26}$$

   hvor ${}_{c}\mathbf{G}_{a} \in \mathbb{L}^{m \times n}$. Så er g lineær, og ${}_{c}\mathbf{G}_{a}$ er afbildningsmatricen for g med hensyn til basis a i V og basis c i W.

Herefter følger tre eksempler på opstilling og elementær brug af afbildningsmatricer.

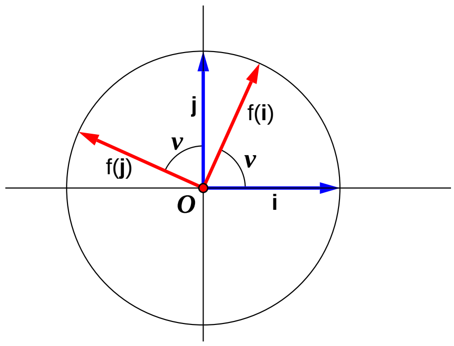
|||| Eksempel 12.19 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

Drejning af plane vektorer afsat ud fra origo er et enkelt eksempel på en lineær afbildning, se opgave 12.4. Lad v være en vilkårlig vinkel, og lad f være den lineære afbildning, der drejer en vilkårlig vektor vinkel v omkring origo mod uret, se figur 12.9.



Figur 12.9: Lineær drejning omkring origo

Vi ønsker at bestemme afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasen for vektorer i planen. Vi har derfor brug for billederne af basisvektorerne $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$, se figur 12.10.



Figur 12.10: Bestemmelse af afbildningsmatrix

Det ses, at $f(\mathbf{i}) = (\cos(v), \sin(v))$ og $f(\mathbf{j}) = (-\sin(v), \cos(v))$. Den ønskede afbildningsmatrix er derfor

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \left[{}_{\mathrm{e}}f(\mathbf{i}) \quad {}_{\mathrm{e}}f(\mathbf{j})\right] = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}.$$

Koordinaterne for billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ af en given vektor $\mathbf{x}$ fås dermed ud fra formlen

$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\,{}_{\mathrm{e}}\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. $$

|||| Eksempel 12.20 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der valgt en basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, og i et 2-dimensionalt vektorrum W er der valgt en basis $c = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. En lineær afbildning $f : V \to W$ opfylder, at

$$ f(\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,,\ f(\mathbf{a}_2) = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 \ \text{ og } \ f(\mathbf{a}_3) = -3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,. \tag{12-27} $$

Vi ønsker at finde billedet ved f af vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \in V$. Vi har altså fået vektoren i a-koordinater, ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = (1, 2, 1)$. Vi finder billedet ved hjælp af afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, der netop afbilder *fra* et rum med basis a *til* et rum med basis c. Afbildningsmatricen, som derfor skal indeholde i V's a-basisvektorers billeder i c-koordinater, opstilles nemt, da vi allerede fra (12-27) kender billederne af basisvektorerne:

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2) \quad {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_3) \,\right]. = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} $$

Da $\mathbf{v}$ har koordinatsættet $(1, 2, 1)$ med hensyn til basis a, finder vi koordinatvektoren for billedet $f(\mathbf{v})$ således:

$$ {}_{\mathrm{c}}f(\mathbf{v}) = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}. $$

Vi har hermed fundet billedet som $f(\mathbf{v}) = 12\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$.

|||| Eksempel 12.21 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

En lineær afbildning $f:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^3$ er givet ved

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{bmatrix} x_1+2x_2+x_4 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4 \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4\end{bmatrix}. \tag{12-28}$$

Bestem afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasis e i $\mathbb{R}^4$ og standardbasis e i $\mathbb{R}^3$. Find desuden billedet af vektoren $\mathbf{x}=(1,1,1,1)$.

Først finder vi billederne af de fire basisvektorer i $\mathbb{R}^4$ ved hjælp af forskriften (12-28):

$$f(1,0,0,0)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\,,\; f(0,1,0,0)=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

$$f(0,0,1,0)=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\,,\; f(0,0,0,1)=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}.$$

Vi kan nu opstille afbildningsmatricen for f:

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&-1&2&-1\\1&-3&2&-2\end{bmatrix}. \tag{12-29}$$

Vi vil nu finde billedet $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ af den givne vektor $\mathbf{x}=(1,1,1,1)$. Til rådighed har vi naturligvis forskriften (12-28), men vi vælger at finde billedet ved hjælp af afbildningsmatricen:

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{y}={}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\,{}_{\mathrm{e}}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&-1&2&-1\\1&-3&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}.$$

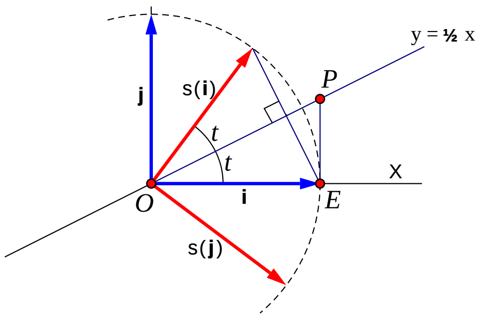
Vi har hermed fundet $y=f(1,1,1,1)=(4,2,-2)$.

|||| Opgave 12.22

I planen er der givet et sædvanligt $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$-koordinatsystem. Spejling af stedvektorer i linjen $y=\frac{1}{2}x$ er en lineær afbildning; lad os kalde den s .

Bestem $s(\mathbf{i})$ og $s(\mathbf{j})$, opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{S}_{\mathrm{e}}$ for s, og bestem et udtryk for spejlingen af en vilkårlig stedvektor $\mathbf{v}$ med koordinaterne (v_1, v_2) med hensyn til standardbasen.

Figur 12.11 indholder nogle hints til bestemmelse af $s(\mathbf{i})$. Gå frem på tilsvarende vis med $s(\mathbf{j})$.



Figur 12.11: Spejling af standardbasisvektorer

12.6 Om brug af afbildningsmatricer

Afbildningsmatricer er et meget nyttigt redskab. Det tillader os at oversætte spørgsmål om lineære afbildninger mellem vektorrum til spørgsmål om matricer og koordinatvektorer, som vi umiddelbart kan regne på. Metoderne forudsætter blot, at der er valgt en basis i hvert af vektorrummene, og at den afbildningsmatrix, som hører til de to baser, er opstillet. Sådan kan vi reducere spørgsmål af så forskellig karakter som at finde polynomier med visse egenskaber, at finde resultatet af en geometrisk konstruktion og at løse differentialligninger, til spørgsmål der kan undersøges ved hjælp af matrixalgebra.

Som gennemgående eksempel i dette afsnit ser vi på en lineær afbildning $f : V \to W$, hvor V er et 4-dimensionalt vektorrum med valgt basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, og hvor W er et 3-dimensionalt vektorrum med valgt basis $c = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$. Afbildningsmatricen for f er

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \tag{12-30} $$

12.6.1 At finde kernen for f

Når man skal finde kernen for f, skal man finde alle $\mathbf{x} \in V$, som afbildes i $\mathbf{0} \in W$. Det vil sige, at man skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,.$$

Denne ligning er ifølge sætning 12.18 ensbetydende med matrixligningen

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\; &\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

som svarer til det homogene lineære ligningssystem med totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Det ses, at løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer i V mht. basis a, som vi kalder $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1, 0) \;\text{ og }\; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0, 1)\,.$$

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er dermed en basis for kernen for f, og kernen for f har dimensionen 2.

Pointen er, at antallet af ubekendte $n = 4$ i det løste ligningssystem pr. definition er lig med antallet af søjler i ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, som igen er lig med $\dim(V)$, se definition 12.17. Endvidere bemærkes det, at ligningssystemets koefficientmatrix er identisk med ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Hvis rangen af koefficientmatricen er k, ved vi, at løsningsmængden og dermed kernen er udspændt af $(n-k)$ lineært uafhængige retningsvektorer, hvor k er rangen af koefficientmatricen. Derfor har vi:

$$\dim(\text{kernen}) = n - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right) = 4 - 2 = 2\,.$$

|||| **Metode 12.23 Bestemmelse af kernen**

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Kernen for en lineær afbildning $f : V \to W$ kan i koordinatform findes som løsningsmængden for det homogene lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \;\middle|\; {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \,\right].$$

Kernen er et underrum i V , og dens dimension er bestemt ved:

$$\dim(\,\ker(f)\,) = \dim(V) - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{12-31}$$

12.6.2 At løse vektorligningen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

Hvordan kan man afgøre, om en vektor $\mathbf{b} \in W$, som ligger i dispositionsrummet, også tilhører *billedrummet* for en given lineær afbildning? Spørgsmålet er, om der findes (mindst) et $\mathbf{x} \in V$, som afbildes i $\mathbf{b}$. Og spørgsmålet kan udvides til, hvordan man kan bestemme alle de $\mathbf{x} \in V$ med denne egenskab, som afbildes i $\mathbf{b}$.

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \to W$, der er repræsenteret af afbildningsmatricen (12-30), og vælger som eksempel den vektor $\mathbf{b} \in W$, som har c-koordinaterne $(1, 2, 3)$. Vi skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,.$$

Regner vi i koordinater, svarer vektorligningen til følgende matrixligning:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\;{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{b}\,,$$

hvilket vil sige matrixligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som svarer til et inhomogent lineært ligningssystem med totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right],$$

der ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Da rangen af totalmatricen her er større end rangen af koefficientmatricen, har det inhomogene ligningssystem ingen løsninger. Vi har altså fundet en vektor i W, som ingen "´originalvektor"´ har i V.

|||| Metode 12.24 Løsning af inhomogen vektorligning $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

I et vektorrum V er der valgt en basis a og i et vektorrum W er der valgt en basis c. For en lineær afbildning $f : V \to W$, og en egentlig vektor $\mathbf{b} \in W$ er den lineære ligning

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

ækvivalent med det inhomogene lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \;\middle|\; {}_{\mathrm{c}}\mathbf{b} \,\right].$$

Eventuelle løsninger kan derfor findes ved sædvanlig GaussJordan-elimination.

Et inhomogent lineært ligningssystem, bestående af m ligninger med n ubekendte, med koefficientmatricen $\mathbf{A}$ og højresiden $\mathbf{b}$ kan på matrixform skrives som

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Afbildningen $f : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^m$ givet ved

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

er lineær. Den lineære ligning $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ er dermed ækvivalent med det betragtede lineære ligningssystem. Vi kan herved indse at struktursætningen for lineære ligningssystemer (se eNote 6 sætning 6.37) blot er et særtilfælde af den generelle struktursætning for lineære ligninger (sætning 12.14).

12.6.3 At bestemme billedrummet

Vi har tidligere fundet, at billedrummet for en lineær afbildning er et underrum i dispositionsrummet, se sætning 12.11. Hvordan kan dette underrum afgrænses og beskrives?

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \rightarrow W$, der er repræsenteret af afbildningsmatricen (12-30). Da der er valgt basen $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ for V, kan vi opskrive samtlige vektorer i V på én gang:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 \,,$$

idet vi tænker os at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så kan samtlige billeder i W af vektorer i V opskrives ved

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + x_3 f(\mathbf{a}_3) + x_4 f(\mathbf{a}_4) \,, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt L_1 og L_2, og hvor vi fortsat tænker os, at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så er

$$f(V) = \operatorname{span}\{\, f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4) \,\} \,.$$

Billedrummet udspændes altså af a-basisvektorernes billeder! Men så kan vi ifølge metode 11.53 bestemme en basis for billedrummet ved at finde de ledende 1-taller i trappeformen af

$$\begin{bmatrix} {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_1) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_3) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_4) \end{bmatrix}.$$

Dette er jo afbildningsmatricen for f med hensyn til de valgte baser

$${}_c\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

som ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$\operatorname{trap}({}_c\mathbf{F}_a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Til de to ledende 1-taller i $\operatorname{trap}({}_c\mathbf{F}_a)$ svarer de to første søjler i ${}_c\mathbf{F}_a$. Vi konkluderer derfor:

Lad $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ være de to vektorer i W, som er bestemt ved c-koordinater, således:

$$_{c}\mathbf{w}_1 =_{c} f(\mathbf{a}_1) = (1,2,1) \;\text{ og }\; _{c}\mathbf{w}_2 =_{c} f(\mathbf{a}_2) = (3,0,-1)\,.$$

Så er $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ en basis for billedrummet $f(V)$.

|||| Metode 12.25 Bestemmelse af billedrummet

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Billedrummet $f(V)$ for en lineær afbildning $f : V \to W$ kan findes ud fra

$$\text{trap}(_{c}\mathbf{F}_{a}) \tag{12-32}$$

på følgende måde: Hvis der i den i'te søjle i (12-32) ikke er et ledende 1-tal, så fjernes $f(\mathbf{a}_i)$ fra vektorsættet $\big(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_n)\big)$. Efter denne udtynding udgør vektorsættet en basis for $f(V)$.

Da antallet af ledende 1-taller i (12-32) er lig med antallet af basisvektorer i den valgte basis for $f(V)$, følger det, at

$$\dim(f(V)) = \rho\,(_{c}\mathbf{F}_{a})\,. \tag{12-33}$$

12.7 Dimensionssætningen

I det foregående afsnits metode 12.23 fandt vi følgende udtryk for dimensionen af kernen for en lineær afbildning $f : V \to W$:

$$\dim(\,\ker(f)\,) = \dim(V) - \rho\,(_{c}\mathbf{F}_{a}) \tag{12-34}$$

og i metode 12.25 et tilsvarende udtryk for dimensionen af billedrummet $f(V)$:

$$\dim(f(V)) = \rho\,(_{c}\mathbf{F}_{a})\,. \tag{12-35}$$

Ved at sammensætte (12-34) og (12-35) opnås en bemærkelsesværdig enkel sammenhæng mellem definitionsrummet, kernen og billedrummet for en lineær afbildning i den følgende sætning.

|||| Sætning 12.26 Dimensionssætningen

Lad V og W være to endeligt-dimensionale vektorrum. For en lineær afbildning $f : V \to W$ gælder:

$$\dim(V) = \dim(\,\ker(f)\,) + \dim(\,f(V)\,)\,.$$

|||| Bevis

Beviset medtages i næste opdatering af eNoten.

■

Her er nogle umiddelbare konsekvenser af sætning 12.26:

- Billedrummet for en lineær afbildning kan aldrig have højere dimension end definitionsrummet.
- Hvis kernen kun indeholder $\mathbf{0}$-vektoren, *bevarer* billedrummet definitionsrummets dimension.
- Hvis kernen har dimensionen $p > 0$, så "*‘forsvinder*"’ der gennem afbildningen p dimensioner.

|||| Opgave 12.27

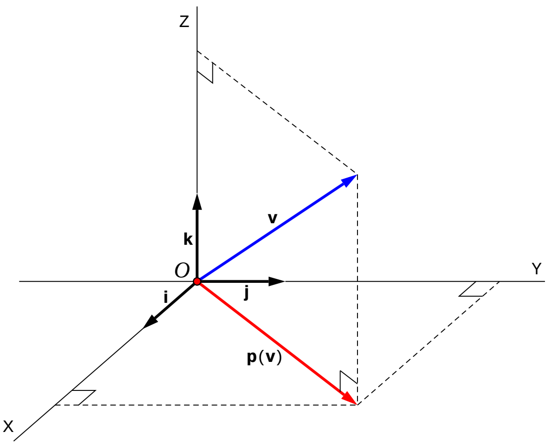
En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses, at kernen for f har dimensionen 1. Find straks ved hovedregning en basis for $f(V)$ og dimensionen af $f(V)$.

|||| Opgave 12.28

I rummet er der givet et sædvanligt $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem. Afbildningen p projicerer stedvektorer ned i (x, y)-planen i rummet, se figur 12.12 .



Figur 12.12: Projektion ned i (x, y)-planen

Vis, at p er lineær, og opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$ for p. Bestem en basis for projektionens kerne og billedrum. Tjek, at dimensionssætningen er opfyldt.

12.8 Ændring af afbildningsmatricen når der skiftes basis

I eNote 11 er det vist, hvordan en vektors koordinater skifter, når der skiftes basis i vektorrummet, se metode 11.45. Vi indleder dette afsnit med at repetere de vigtigste pointer og vise to eksempler.

Antag, at der i V er givet en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, og at der vælges en ny b-basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ i V. Hvis en vektor $\mathbf{x}$ har b-koordinatvektoren ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}$, så kan dens a-koordinatvektor udregnes ved matrixvektor-produktet

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} \, , \tag{12-36} $$

hvor *basisskiftematricen* ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ er givet ved

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \ldots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix} . \tag{12-37} $$

Vi viser nu to eksempler på brug af (12-37). I det første er det de "‘nye"’ koordinater, der er givne, hvorefter de "´gamle"’ beregnes. I det andet er det omvendt: de "‘gamle"’ kendes, og de "‘nye"’ bestemmes.

|||| Eksempel 12.29 Fra nye koordinater til gamle

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet en basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, hvorefter der vælges en ny basis b bestående af vektorerne

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\,, \quad \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\,.$$

Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$.

Først ser vi, at

$${}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{12-38}$$

Herefter får vi

$${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{12-39}$$

|||| Eksempel 12.30 Fra gamle koordinater til nye

I et 2-dimensionalt vektorrum W er der givet en basis $c = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, hvorefter der vælges en ny basis d bestående af vektorerne

$$\mathbf{d}_1 = 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \quad \text{og} \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,.$$

Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y}$ for $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2$.

Først ser vi, at

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = \left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{12-40}$$

Herefter får vi

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{12-41}$$

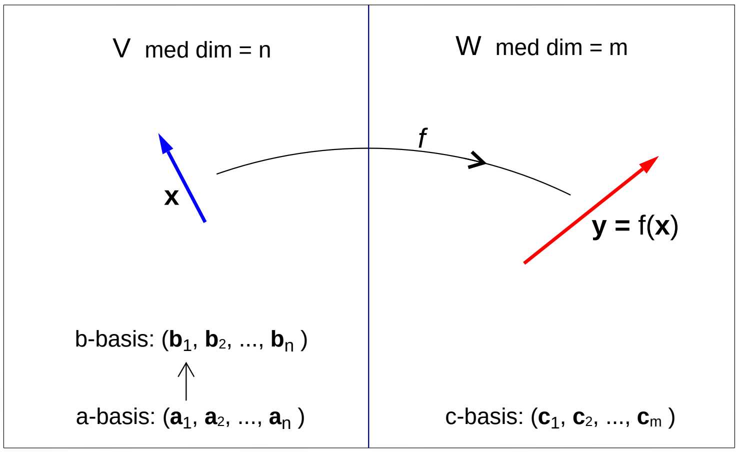
Vi går nu videre med at se, hvordan en afbildningsmatrix ændres, når der skiftes basis i definitionsrummet og/eller dispositionsrummet.

For to vektorrum V og W med endelig dimension kan afbildningsmatricen for en lineær afbildning $f : V \to W$ kun opstilles, når der er valgt en basis i V og en basis i W. Med afbildningsmatricens symbol ${}_c\mathbf{F}_a$ viser vi netop, at dens grundlag er en given basis a i V og en given basis c i W.

Ofte ønsker man at skifte basen i V eller basen i W. I det første tilfælde ændres koordinaterne for de vektorer $\mathbf{x} \in V$, der skal afbildes, mens koordinaterne for deres billeder $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er uforandrede. I det andet tilfælde er det omvendt. Her er koordinaterne for $\mathbf{x}$ de samme, mens billedets koordinater skifter. Hvis der skiftes basis i både V og W, så ændres koordinaterne både for $\mathbf{x}$ og for $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

I de følgende underafsnit opstilles metoder til at finde den nye afbildningsmatrix for f, når der skiftes basis i definitionsrummet, dispositionsrummet eller begge. Først viser vi, hvordan en vektors koordinater skifter, når der skiftes basis i vektorrummet (som nærmere beskrevet i metode 11.45.)

12.8.1 Basisskifte i definitionsrummet



Figur 12.12: Lineær afbildning

På figur 12.12 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$, som med hensyn til basis a i V og basis c i W har afbildningsmatricen ${}_c\mathbf{F}_a$. Vi skifter nu basis i V fra basis a til basis

b. Afbildningsmatricen for f skal nu ændres til ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$, før den kan tage imod vektorer i basis b. Lad os finde den. Ligningen

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

oversættes til koordinater og omformes:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\right) = \left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right){}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf kan vi udlede, at afbildningsmatricen for f med hensyn til basis b i V og basis c i W kan dannes ved matrixproduktet

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{12-42}$$

|||| Eksempel 12.31 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betragter det 3-dimensionale vektorrum V, som er behandlet i eksempel 12.29, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 12.30. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, hvor $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$.

Vi afprøver to forskellige veje.

Metode 1
Vi bruger a-koordinaterne for $\mathbf{x}$ som fundet i (12-39):

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Metode 2
Vi ændrer afbildningsmatricen for f vha. basisskiftematricen fra (12-38):

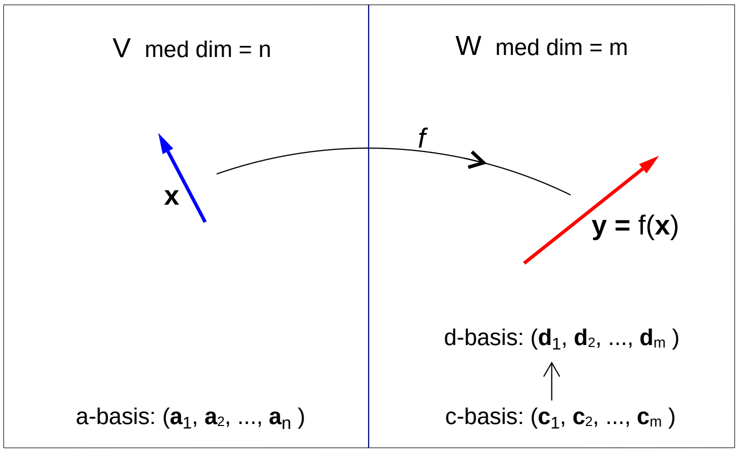
$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater for $\mathbf{x}$:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2$.

12.8.2 Basisskifte i dispositionsrummet



Figur 12.13: Lineær afbildning

På figur 12.13 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$, som med hensyn til basis a i V og basis c i W har en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter nu basis i W fra basis c til basis d. Afbildningsmatricen for f skal nu i stedet være ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Lad os finde den. Ligningen

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

oversættes til matrixligningen

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,,$$

som er ensbetydende med

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\right),$$

hvoraf fås

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right){}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf udleder vi, at afbildningsmatricen for f med hensyn til a-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,. \tag{12-43}$$

|||| Eksempel 12.32 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V, som er behandlet i eksempel 12.29, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 12.30. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen

$$
{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} .
$$

Givet vektoren $\mathbf{x} = -4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$. Bestem billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_2$.

Vi afprøver to forskellige veje.

Metode 1
Vi bruger den givne afbildningsmatrix,

$$
{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} ,
$$

og oversætter resultatet til d-koordinater ved hjælp af basisskiftematricen fra (12-40):

$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} .
$$

Metode 2
Vi ændrer først afbildningsmatricen for f ved hjælp af basisskiftematricen fra (12-40):

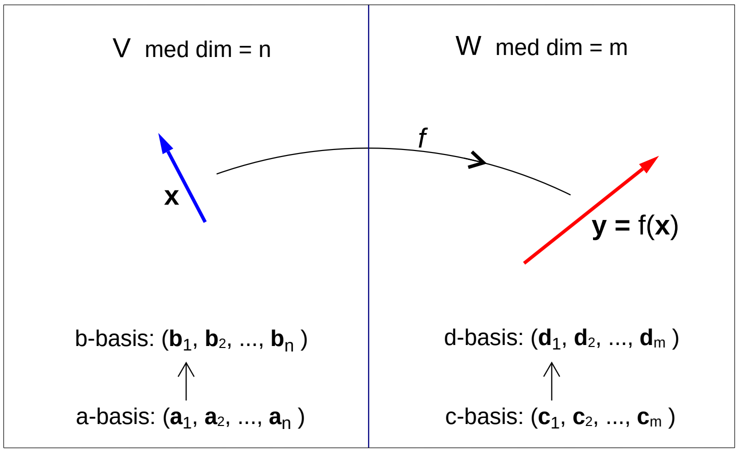
$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} .
$$

Så kan vi direkte udregne d-koordinaterne:

$$
{}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} .
$$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

12.8.3 Basisskifte i både definitions- og dispositionsrummet



Figur 12.14: Lineær afbildning

På figur 12.14 er der er givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til basis a i V og basis c i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i V fra basis a til basis b og i W fra basis c til basis d . Afbildningsmatricen for f være ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$. Lad os finde den. Ligningen

$$y = f(\mathbf{x})$$

svarer i koordinater til

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,,$$

som er ensbetydende med

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\right)\right),$$

hvoraf fås

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right){}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf udleder vi, at afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{12-44}$$

|||| Eksempel 12.33 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V, som er behandlet i eksempel 12.29, og det 2-dimensionale vektorrum W, som er behandlet i eksempel 12.30. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}. $$

Givet vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$. Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_2$.

Vi ændrer afbildningsmatricen ved hjælp af (12-40) og (12-38):

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. $$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater for $\mathbf{x}$ og udregne d-koordinaterne:

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. $$

Konklusionen er, at $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

Basisskiftet viser sig i dette eksempel at være ganske praktisk. Den nye afbildningsmatrix er langt simplere end de tilsvarende for andre baser fra de forrige eksempler.

12.8.4 Opsummering vedrørende basisskifte

Vi samler resultaterne vedrørende basisskifte i de foregående underafsnit i den følgende metode.

|||| Metode 12.34 Ændring af afbildningsmatrix ved basisskifte

I vektorrummet V er der givet en basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ og en ny basis $b = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$. I vektorrummet W er der givet en basis $c = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m)$ og en ny basis $d = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m)$.

Hvis f er en lineær afbildning $f : V \to W$, som med hensyn til basis a i V og basis c i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, så gælder:

1. Afbildningsmatricen for f med hensyn til basis b i V og basis c i W er

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \, . \tag{12-45} $$

2. Afbildningsmatricen for f med hensyn til basis a i V og basis d i W er

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \, . \tag{12-46} $$

3. Afbildningsmatricen for f med hensyn til basis b i V og basis d i W er

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \, . \tag{12-47} $$

I de tre formler har vi brugt basisskiftematricerne:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \left[\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \,\right] \text{ og } {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_1 \quad {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_2 \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_m \,\right] . $$