eNote 11

Vektorrum

I denne eNote opstilles en generel teori for mængder, for hvilke der er defineret addition og multiplikation med skalar, og som opfylder de samme regneregler som geometriske vektorer i planen og rummet. Det vises, hvordan man ved hjælp af begreberne basis og koordinater kan forenkle og standardisere løsningen af opgaver, der er fælles for alle disse mængder, som kaldes vektorrum. Kendskab til eNote 10 om geometriske vektorer er en fordel, og der forudsættes kendskab til løsningsmængder for linæere ligningssystemer eNote 6, til elementær matrixalgebra og til et par vigtige resultater angående determinanter.
Opdateret 24.09.21 af Karsten Schmidt

11.1 Generalisering af begrebet vektor

Begrebet *vektor* kommer fra plan- og rumgeometrien, hvor det betegner et sammenhørende par af en længde og en retning. Vektorer kan repræsenteres af orienterede linjestykker, hvorefter det er muligt at definere to geometriske regneoperationer: *addition* af vektorer og *multiplikation* af vektorer *med tal* (skalarer). Til brug ved lidt mere sammensatte regneoperationer beviser man otte regneregler, se sætning 10.13 i eNote 10, der handler om de to indførte regneoperationer.

I mange andre mængder af matematiske objekter har man ligeledes brug for at definere addition af objekter samt multiplikation af et objekt med en skalar. Det er talrummene $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ og matrixmængderne $\mathbb{R}^{m\times n}$ gode eksempler på, se eNote 5 henholdsvis eNote 7. Det bemærkelsesværdige er, at de regneregler for addition og multiplikation med skalar, som det er muligt at bevise inden for hver af disse mængder, er *de samme* som de regneregler, der gælder for geometriske vektorer i planen og rummet! Man siger derfor:

Lad os lave *én teori*, der gælder for alle de mængder, hvor der kan defineres addition og multiplikation med skalar, og hvor de otte regneregler kendt fra geometrien gælder. Man foretager hermed en *generalisering* af læren om geometriske vektorer, og enhver mængde, der omfattes af teoriens betingelser, kaldes et *vektorrum*.

I eNote 10 om de geometriske vektorer er det demonstreret, hvordan man kan indføre en *basis* for vektorerne, hvorefter alle vektorer i det pågældende rum er bestemt ved deres *koordinater* med hensyn til denne basis. Fordelen er, at man derved kan erstatte geometrisk vektorregning med regning med vektorernes koordinater. Det viser sig, at det også er muligt at overføre begreberne vedrørende basis og koordinater til mange andre mængder af matematiske objekter, hvor også addition af objekter og multiplikation med skalar gælder.

Når vi i det følgende undersøger vektorrum abstrakt, betyder det, at vi ser på hvilke begreber, sætninger og metoder, der er en følge af de fælles regneregler, idet vi ser bort fra den konkrete betydning, som addition og multiplikation med skalar har i de mængder af konkrete objekter, hvor de er indført. Man får derved generelle metoder gældende for *enhver* mængde af den ovennævnte art. Når man i en bestemt arbejdsopgave er tilbage i et konkret vektorrum, må man *fortolke*, hvad de opnåede resultater betyder i denne særlige sammenhæng. Fremgangsmåden kaldes *den aksiomatiske metode*. Med henblik på alt dette fremlægger vi nu den abstrakte definition af vektorrum.

|||| Definition 11.1 Vektorrum

Lad $\mathbb{L}$ betegne $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og lad V være en mængde af matematiske elementer, hvori der er defineret de to regneoperationer

I. *addition*, der ud fra to elementer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i V danner summen $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, som også tilhører V, samt

II. *multiplikation med skalar*, der ud fra ethvert $\mathbf{a} \in V$ og enhver skalar $k \in \mathbb{L}$ danner et produkt $k\mathbf{a}$ eller $\mathbf{a}k$, som også tilhører V.

V kaldes et *vektorrum*, og elementerne i V kaldes *vektorer*, hvis de følgende otte regneregler er opfyldt:

1.	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	Addition er kommutativ
2.	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	Addition er associativ
3.	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	I V findes $\mathbf{0}$, som er *neutral* mht. addition
4.	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	Til ethvert $\mathbf{a} \in V$ findes et *modsat objekt* $-\mathbf{a} \in V$
5.	$k_1(k_2\mathbf{a})=(k_1k_2)\mathbf{a}$	Multiplikation med skalarer er associativ
6.	$(k_1+k_2)\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{a}$	De distributive regler gælder
7.	$k_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k_1\mathbf{a}+k_1\mathbf{b}$	
8.	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	Skalaren 1 er *neutral* i produkt med vektorer

Hvis $\mathbb{L}$ i definition 11.1 står for $\mathbb{R}$, taler man om V som et *vektorrum over de reelle tal*. Det betyder, at skalaren k kun kan være et vilkårligt reelt tal. Tilsvarende taler man om V som et *vektorrum over de komplekse tal*, hvis $\mathbb{L}$ står for $\mathbb{C}$, hvor k er et vilkårligt komplekst tal.

Kravene I og II i definition 11.1 om, at resultatet af addition og af multiplikation med skalar selv skal være et element i V, kaldes for *stabilitetskravene*. V skal således være *stabil* med hensyn til de to regnearter.

Mængden af geometriske vektorer i planen og mængden af geometriske vektorer i rummet er naturligvis de mest oplagte eksempler på vektorrum, da de otte regneregler i definition 11.1 er opstillet ud fra netop geometriske vektorer i disse rum. Men lad os alligevel lige se efter, om *stabilitetskravene* gælder.

Er summen af to vektorer i planen selv en vektor i planen? Og er en vektor i planen ganget med et tal selv en vektor i planen? Ud fra definitionen på de to regnearter (se definition 10.2 og definition 10.3 i eNote 10) er svaret oplagt ja, og derfor er mængden af vektorer i planen et vektorrum. På samme måde ses, at mængden af vektorer i rummet er et vektorrum.

|||| Sætning 11.2 Entydighed af 0-vektor og modsat vektor

For ethvert vektorrum V gælder:

1. V indeholder kun ét neutralt element med hensyn til addition.
2. Enhver vektor $\mathbf{a} \in V$ har kun ét modsat element.

|||| Bevis

Første del
Lad $\mathbf{0}_1$ og $\mathbf{0}_2$ være to elementer i V, der begge er neutrale med hensyn til addition. Der gælder da:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2\,,$$

hvor vi har udnyttet, at addition er kommutativ. Der findes altså kun én 0-vektor neutral for addition: $\mathbf{0}$.

Anden del
Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in V$ være to modsatte elementer for $\mathbf{a} \in V$. Der gælder da:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a} + \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}_1) + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2\,,$$

hvor vi har udnyttet, at addition er både kommutativ og associativ. Der findes altså for $\mathbf{a}$ kun én modsat vektor, $-\mathbf{a}$.

■

|||| Definition 11.3 Subtraktion

Lad V være et vektorrum, og lad $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Ved differensen $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ forstås vektoren

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\,. \tag{11-1}$$

|||| Opgave 11.4

Bevis, at $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

|||| Opgave 11.5 Nul-reglen

Bevis, at følgende variant af nul-reglen gælder i ethvert vektorrum:

$$k\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow k = 0 \text{ eller } \mathbf{a} = \mathbf{0} \,. \tag{11-2}$$

|||| Eksempel 11.6 Matricer som vektorer

For to vilkårlige naturlige tal m og n er $\mathbb{R}^{m\times n}$ (det vil sige mængden af *reelle* $(m \times n)$-matricer) et vektorrum. Ligeledes er $\mathbb{C}^{m\times n}$ (det vil sige mængden af *komplekse* $(m \times n)$-matricer) et vektorrum.

Betragt for eksempel $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Hvis vi lægger to matricer af denne type sammen, får vi en ny matrix af samme type, og hvis vi ganger en (2×3)-matrix med et tal, får vi også en ny (2×3)-matrix (se definition 7.1). Dermed er stabilitetskravene opfyldt. At $\mathbb{R}^{2\times 3}$ desuden opfylder de otte regneregler, fremgår af sætning 7.3.

|||| Opgave 11.7

Gør rede for, at der for ethvert naturligt tal n gælder, at talrummet $\mathbb{L}^n$ er et vektorrum. Husk også at tænke over tilfældet $n = 1$!

I de følgende to eksempler skal vi se, at den geometrisk inspirerede vektorrumsteori overraskende nok kan bringes i spil på velkendte mængder af *funktioner*. Matematikhistorikere har i den forbindelse talt om *den matematiske analyses geometrisering*!

|||| Eksempel 11.8 Polynomier som vektorer

Mængden af *polynomier* $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ af højst n'te grad betegnes $P_n(\mathbb{R})$. Et element P i $P_n(\mathbb{R})$ er altså givet ved

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,, \tag{11-3}$$

hvor koefficienterne $a_0, a_1, \cdots, a_n$ er vilkårlige reelle tal. Vis, at $P_n(\mathbb{R})$ er et vektorrum.

Stabilitetskravene I og II fra definition 11.1 skal først og fremmest være opfyldt og derudover også de otte regneregler.

Addition af to polynomier i $P_n(\mathbb{R})$ defineres ved parvis addition af koefficienter, der hører til led af samme grad. Multiplikation af et polynomium i $P_n(\mathbb{R})$ med et tal k defineres som multiplikation af hver af koefficienterne med k. Som eksempel på disse to regneoperationer ser vi på to polynomier fra $P_3(\mathbb{R})$ (altså to polynomier af højst tredje grad):

$$P(x) = 1 - 2x + x^3 = 1 - 2x + 0x^2 + 1x^3$$

og

$$Q(x) = 2 + 2x - 4x^2 = 2 + 2x - 4x^2 + 0x^3.$$

Ved summen af P og Q forstår vi polynomiet $R = P + Q$ bestemt ved

$$R(x) = (1+2) + (-2+2)x + (0-4)x^2 + (1+0)x^3 = 3 - 4x^2 + x^3 \,,$$

og ved multiplikation af P med skalaren $k = 3$ forstår vi polynomiet $S = 3P$ bestemt ved

$$S(x) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot (-2))x + (3 \cdot 0)x^2 + (3 \cdot 1)x^3 = 3 - 6x + 3x^3.$$

Vi vil nu argumentere for, at $P_n(\mathbb{R})$ med de indførte regneoperationer er et vektorrum! At $P_n(\mathbb{R})$ overholder stabilitetskravene, følger, som eksemplerne herover antyder, af, at

- summen af to polynomier af højst n'te grad selv er et polynomium af højst n'te grad og, at
- multiplikation af et polynomium af højst n'te grad med et reelt tal igen giver et polynomium af højst n'te grad.

Betingelserne 1, 2 og 5 til 8 i definition 11.1 er opfyldt, fordi samme regneregler gælder for de udregninger på polynomiernes koefficienter, som regneoperationerne er defineret ved. Endelig er betingelse 3 og 4 opfyldt, idet polynomiet

$$P(x) = 0 + 0x + \cdots 0x^n = 0$$

udfylder rollen som *nulvektor*, og idet *den modsatte vektor* til $P(x) \in P_n(\mathbb{R})$ er givet ved polynomiet

$$-P(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n .$$

På samme måde kan det vises, at også mængden af polynomier $P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ af højst n'te grad, som betegnes $P_n(\mathbb{C})$, er et vektorrum.

|||| Opgave 11.9

Gør rede for, at $P(\mathbb{R})$, det vil sige mængden af *alle* reelle polynomier, er et vektorrum.

|||| Eksempel 11.10 Kontinuerte funktioner som vektorer

Mængden af *kontinuerte reelle funktioner* defineret på $\mathbb{R}$ betegnes $C^0(\mathbb{R})$. Additionen $m = f + g$ af to funktioner f og g i $C^0(\mathbb{R})$ indføres ved

$$m(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ for ethvert } x \in \mathbb{R} ,$$

og multiplikationen $n = k \cdot f$ af f med et reelt tal k ved

$$n(x) = (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \text{ for ethvert } x \in \mathbb{R} .$$

Argumenter for, at $C^0(\mathbb{R})$ med de indførte regneoperationer er et vektorrum.

Da $m = f + g$ og $n = k \cdot f$ er kontinuerte (ifølge grundlæggende teori for kontinuerte funktioner), ser vi, at $C^0(\mathbb{R})$ opfylder de to stabilitetskrav.

Endvidere findes der en funktion, der udfylder rollen som nulvektor, nemlig *nulfunktionen*, det vil sige den funktion, som antager værdien 0 for alle $x \in \mathbb{R}$. Samtidig findes den modsatte vektor til den kontinuerte reelle funktion f ved vektoren $(-1)f = -f$, som for alle $x \in \mathbb{R}$ har værdien $-f(x)$.

Herefter er det let at indse, at $C^0(\mathbb{R})$ med de indførte regneoperationer opfylder alle 8 betingelser i definition 11.1, og at $C^0(\mathbb{R})$ dermed er et vektorrum.

11.2 Linearkombinationer og udspændinger

En pointe ved regneregler som $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ og $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ fra definition 11.1 er, at man udelader parenteser, når man skal addere en række vektorer, da det ingen betydning har for den resulterende vektor, i hvilken rækkefølge man har lagt vektorerne sammen parvist. Dette er baggrunden for *linearkombinationer*, hvor et sæt af vektorer er multipliceret med skalarer og derefter opskrevet som en sum.

Definition 11.11 Linearkombination

Når der i et vektorrum V er givet p vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, og der er valgt vilkårlige skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_p$, så kaldes summen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_p\mathbf{v}_p$$

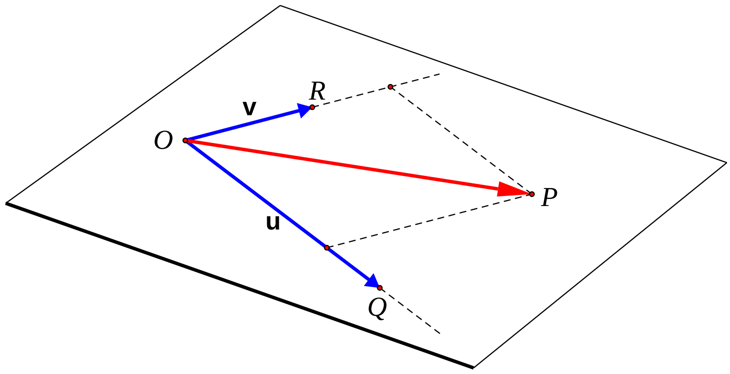
en *linearkombination* af de p givne vektorer.

Hvis alle koefficienterne $k_1, \ldots, k_p$ er lig med 0, kaldes linearkombinationen *uegentlig*, men hvis blot én af dem er forskellig fra 0, er den *egentlig*.

I definition 11.11 omtales blot en enkelt linearkombination. Udregnes den, fås en resulterende vektor i samme rum. I mange sammenhænge har det interesse at se på den samlede mængde af mulige linearkombinationer af givne vektorer. Mængden kaldes for *udspændingen* af vektorerne, da en sådan mængde indeholder *samtlige* vektorer, som kan dannes ved linearkombinationer af de givne vektorer. Betragt for eksempel den plan i rummet, som går gennem origo og indeholder stedvektorerne for to ikke parallelle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, se figur 7.1. Planen kan betragtes som *udspændingen* af de to vektorer, idet stedvektoren

$$\overrightarrow{OP} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$$

"'gennemløber"' *alle* punkter P i planen, når k_1 og k_2 antager alle tænkelige reelle værdier. Vha. af disse to vektorer kan alle andre punkter (eller vektorer) i denne plan altså bestemmes.



Figur 7.1: **u** og **v** udspænder en plan i rummet

|||| Definition 11.12 Udspænding og span

Ved *udspændingen* af et givet sæt vektorer $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ i et vektorrum V forstås den samlede mængde af alle tænkelige linearkombinationer af vektorerne. Udspændingen af de p vektorer skrives kort som

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}\,,$$

eller i tilfælde af *uendeligt* mange basisvektorer som

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}\,.$$

|||| Eksempel 11.13 Linearkombination og span

Vi betragter i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer/vektorer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{11-4}$$

Et eksempel på en linearkombination af de tre vektorer er

$$2\mathbf{A} + 0\,\mathbf{B} + (-1)\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11-5}$$

Vi har dermed

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}\,. \tag{11-6}$$

11.3 Lineær afhængighed og lineær uafhængighed

To geometriske vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært afhængige, hvis de er parallelle, det vil sige, hvis der findes et tal k, så $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Mere generelt er et vilkårligt sæt af vektorer lineært afhængigt, hvis en af vektorerne er en linearkombination af de øvrige. Dette begreb ønsker vi at overføre til vektorrumsteorien, se den følgende definition.

|||| Definition 11.14 Lineær afhængighed og uafhængighed

Et sæt bestående af p vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ i et vektorrum V er *lineært afhængigt*, hvis mindst én af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, altså hvis for eksempel

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p \,.$$

Hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, kaldes sættet *lineært uafhængigt*.

Hvis vektorsættet kun består af en enkelt vektor, kaldes sættet lineært afhængigt, hvis det består af 0-vektoren, og ellers lineært uafhængigt.

|||| Eksempel 11.15 Lineær afhængighed

Ethvert vektorsæt, som indeholder nul-vektoren, er lineært afhængigt! Betragt for eksempel sættet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{w})$. Her kan nul-vektoren jo helt trivielt skrives som en linearkombination af de tre andre vektorer i sættet:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} \,.$$

|||| Eksempel 11.16 Lineær afhængighed

Betragt i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer/vektorer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{11-7}$$

$\mathbf{C}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, da der gælder, at

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} \,.$$

Derfor er $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ lineært afhængige. Hvis man som her kan finde blot ét eksempel på en linearkombination, så er sættet altså lineært afhængigt.

Derimod er sættet bestående af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ lineært uafhængigt, da de to vektorer ikke er "‘parallelle"’, idet der tydeligvis ikke findes et tal k således, at $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$. Ligeså med sættene $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ og $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Når man skal undersøge, om et sæt af vektorer er lineært afhængigt, opstår ved brug af definition 11.14 spørgsmålet om, *hvilken* af sættets vektorer der evt. er en linearkombination af de øvrige. Hvor skal undersøgelsen starte? Dilemmaet kan undgås, hvis man i stedet for definitionen bruger den følgende sætning:

|||| Sætning 11.17 Lineær afhængighed og uafhængighed

At et vektorsæt $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ i et vektorrum V er lineært afhængigt, er ensbetydende med, at nul-vektoren kan skrives som en *egentlig* linearkombination af vektorerne. Der skal altså findes skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_p$, som ikke alle er lig med 0 (kaldet nul-løsningen), der opfylder

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \,. \tag{11-8}$$

I modsat fald — altså hvis nul-løsningen *er* den eneste løsning — er vektorerne lineært uafhængige.

.

|||| Bevis

Antag, at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ er lineært afhængigt. Så kan en af dem skrives som en linearkombination af de øvrige. For eksempel er

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p \,. \tag{11-9}$$

Men dette er ensbetydende med, at

$$\mathbf{v}_1 - k_2\mathbf{v}_2 - k_3\mathbf{v}_3 - \cdots - k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \,, \tag{11-10}$$

hvorved nul-vektoren er skrevet som en linearkombination af vektorsættet, hvor mindst én af koefficienterne $k_2, k_3, \ldots, k_p$ ikke er 0, da vi jo har koefficienten 1 til $\mathbf{v}_1$.

Antag omvendt, at nul-vektoren er skrevet som en egentlig linearkombination af vektorsættet, hvor for eksempel koefficienten k_1 til $\mathbf{v}_1$ er forskellig fra 0. Så har vi

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_1 = (-1)\frac{k_2}{k_1}\mathbf{v}_2 + \cdots + (-1)\frac{k_p}{k_1}\mathbf{v}_p \,. \tag{11-11}$$

Hermed er $\mathbf{v}_1$ skrevet som en egentlig linearkombination af de øvrige vektorer, og beviset er fuldført.

■

|||| Eksempel 11.18 Lineær afhængighed

I talrummet $\mathbb{R}^4$ er der givet vektorerne $\mathbf{a} = (1, 3, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 9, 0, 4)$ og $\mathbf{c} = (2, 0, 0, 1)$. Da der gælder:

$$3\mathbf{a} - \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{0}\,,$$

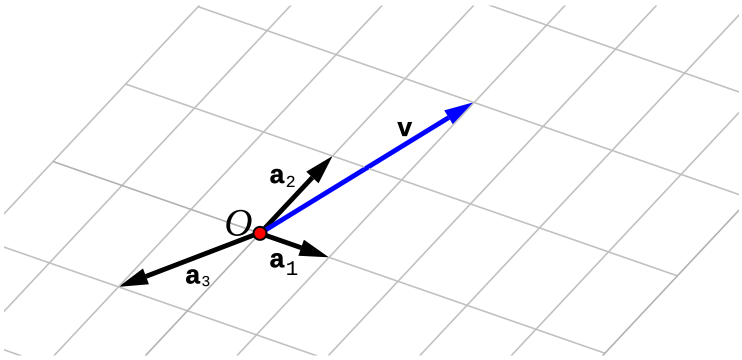
er nul-vektoren skrevet som en egentlig linearkombination af de tre vektorer. De er derfor lineært afhængige.

11.4 Basis og dimension for et vektorrum

En afgørende begrundelse for at indføre en basis i et vektorrum er, at alle vektorer i vektorrummet derefter kan beskrives ved hjælp af koordinater. I et senere afsnit vises det, hvordan man kan forenkle og standardisere regneopgaver med vektorer, når man benytter koordinater. Men i dette afsnit vil vi diskutere de krav, man må stille til en basis, og undersøge de teoretiske konsekvenser af kravene.

En *basis* for et vektorrum består af et vist antal vektorer opskrevet i en bestemt rækkefølge. En afgørende opgave for basisvektorerne er at udspænde hele vektorrummet. Men mere præcist ønsker vi dette job udført af *så få vektorer som muligt*. I så fald viser det sig nemlig, at alle vektorer i vektorrummet *på entydig vis* kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne. Og det er netop *koefficienterne* i den entydige linearkombination vi vil bruge som *koordinater*.

Lad os tage udgangspunkt i nogle karakteristiske egenskaber ved baser for de geometriske vektorer i planen.



Figur 7.2: Koordinatsystem i planen med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

Betragt vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ på figur 7.2. Ingen tvivl om at enhver anden vektor i planen kan skrives som en linearkombination af de tre vektorer. Men linearkombinationen er ikke entydig. For eksempel kan en bestemt vektor $\mathbf{v}$ skrives på disse to måder:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 1\mathbf{a}_3$$
$$\mathbf{v} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 \,.$$

Dermed kan vi ikke bruge koefficienterne som koordinater, for hvilke af de to ligninger skal vi da bruge? Problemet er, at a-vektorerne er lineært afhængige af hinanden; for eksempel er $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Men hvis vi fjerner én af dem, for eksempel $\mathbf{a}_3$, er sættet lineært uafhængigt, og der er så kun én mulig skrivemåde:

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \,.$$

Dermed er koefficienterne unikke og kan bruges som et unikt koordinatsæt $(1, 2)$.

Vi kan opsummere de karakteristiske egenskaber for en basis for de geometriske vektorer i planen således:

1. Enhver basis skal bestå af lineært uafhængige vektorer,
2. enhver basis skal indeholde netop to vektorer, og
3. *ethvert* sæt bestående af to lineært uafhængige vektorer er en basis.

Egenskab nr. 2 herover fortæller, at der kræves *netop* to vektorer til en basis for planen. Hvis der nemlig er *flere* end to, så er de lineært afhængige, og hvis der er *færre* end to, udspænder de ikke hele vektorrummet.

Disse egenskaber lader sig overføre til alle andre vektorrum. Det tager vi hul på nu, og vi starter med den generelle definition af en basis.

|||| Definition 11.19 Basis

Ved en *basis* for et vektorrum V forstås en mængde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ af vektorer fra V, som opfylder:

1. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ udspænder V.
2. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er lineært uafhængigt.

Her bør vi stoppe op og sørge for, at definition 11.19 faktisk opfylder vores entydighedskrav til en basis. Dette fastslås i den følgende sætning.

|||| Sætning 11.20 Entydighedssætningen

Hvis der i et vektorrum V er givet en basis, kan enhver vektor i V skrives som en *unik* linearkombination af basisvektorerne.

|||| Bevis

Vi giver idéen i beviset ved at se på et vektorrum V, som har en basis bestående af tre basisvektorer $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, og antager, at $\mathbf{v}$ er en vilkårlig vektor i V, som på to måder kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne. Vi kan da opstille to de ligninger

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} \\ \mathbf{v} &= k_4\mathbf{a} + k_5\mathbf{b} + k_6\mathbf{c}\,. \end{aligned} \tag{11-12}$$

Ved at trække den nederste ligning i (11-12) fra den øverste opnår vi ligningen

$$\mathbf{0} = (k_1 - k_4)\mathbf{a} + (k_2 - k_5)\mathbf{b} + (k_3 - k_6)\mathbf{c}\,. \tag{11-13}$$

Da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært uafhængige, kan nul-vektoren *kun* skrives som en uegentlig linearkombination af dem. Derfor er hver af koefficienterne i (11-13) lig med 0, hvilket medfører, at $k_1 = k_4$, $k_2 = k_5$ og $k_3 = k_6$. Men så er de to måder, som $\mathbf{v}$ har været skrevet som linearkombination af basisvektorerne på, i virkeligheden den samme, og der findes dermed kun én måde!

Dette ræsonnement lader sig umiddelbart udvide til en basis, som består af et vilkårligt antal basisvektorer.

■

Vi vender nu tilbage til det faktum, at enhver basis for de geometriske vektorer i planen altid indeholder *to* lineært uafhængige vektorer, og at der tilsvarende for geometriske vektorer i rummet gælder, at en basis må bestå af *tre* lineært uafhængige vektorer. Det viser sig, at det faste antal basisvektorer er en egenskab ved alle vektorrum, der har en basis, og dette gør det muligt at tale om *dimensionen* af et vektorrum. For at bevise, at egenskaben findes, får vi brug for følgende hjælpesætning.

|||| Hjælpesætning 11.21

Hvis et vektorrum V har en basis bestående af n basisvektorer, så vil ethvert sæt fra V, som indeholder mere end n vektorer, være lineært afhængigt.

|||| Bevis

Vi viser idéen i beviset ved at betragte et vektorrum V, som har en basis af to vektorer $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, og undersøger tre vilkårlige vektorer $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ og $\mathbf{e}$ fra V. Vi viser, at de tre vektorer nødvendigvis må være lineært afhængige.

Da $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er en basis for V, kan vi opstille de tre ligninger

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} \\ \mathbf{e} &= e_1\mathbf{a} + e_2\mathbf{b}\,. \end{aligned} \tag{11-14}$$

Betragt endvidere nul-vektoren opskrevet ved følgende linearkombination:

$$x_1\mathbf{c} + x_2\mathbf{d} + x_3\mathbf{e} = \mathbf{0}\,. \tag{11-15}$$

Ved indsættelse af (11-14) i (11-15) er linearkombinationen ensbetydende med

$$(x_1c_1 + x_2d_1 + x_3e_1)\mathbf{a} + (x_1c_2 + x_2d_2 + x_3e_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}\,. \tag{11-16}$$

Da nul-vektoren kun kan opnås som en linearkombination af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, hvis hver af koefficienterne er lig med 0, er (11-16) ensbetydende med følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 &= 0 \\ c_2x_1 + d_2x_2 + e_2x_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{11-17}$$

Dette er et homogent lineært ligningssystem, hvor antallet af ligninger er mindre end antallet af ubekendte. Ligningssystemet har derfor uendeligt mange løsninger, hvilket betyder, at (11-16) ikke kun er opnåelig under betingelsen af $x_1 = 0, x_2 = 0$ og $x_3 = 0$ men også har andre løsninger. Dermed er det vist, at sættet $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ er lineært afhængigt.

Generelt: Antag nu at basen for V består af n vektorer, og at der gives m vektorer fra V, hvor $m > n$. Ved at følge samme fremgangsmåde som ovenfor opstår der et homogent lineært ligningssystem bestående af n ligninger med m ubekendte som, fordi $m > n$, ligeledes har uendeligt mange løsninger. Derved er det vist, at de m vektorer er lineært afhængige.

■

Og så er vi klar til at fremsætte den følgende vigtige sætning.

|||| Sætning 11.22 Antal af basisvektorer

Hvis et vektorrum V har en basis bestående af n basisvektorer, så vil *enhver* basis for V ligeledes bestå af n basisvektorer.

|||| Bevis

Antag, at V har to baser med forskelligt antal basisvektorer. Vi kalder basen med færrest basisvektorer for a og den med flest for b. Ifølge hjælpesætning 11.21 må b-basisvektorerne være lineært afhængige, og dette er i modstrid med, at de udgør en basis. Antagelsen om, at V kan have to baser med forskelligt antal basisvektorer, må derfor være forkert.

■

At antallet af basisvektorer ifølge sætning 11.22 er en *egenskab* ved vektorrum, motiverer indførelsen af begrebet dimension.

|||| Definition 11.23 Dimension

Ved *dimensionen* af et vektorrum V, som har en basis b, forstås antallet af basisvektorer i b. Hvis dette antal er n, siger man, at V er n-dimensionalt og skriver

$$\dim(V) = n\,. \tag{11-18}$$

|||| Eksempel 11.24 Dimension af geometriske vektorrum

Heldigvis bekræfter definition 11.23 en intuitiv fornemmelse af, at mængden af geometriske vektorer i planen har dimensionen to, og at mængden af geometriske vektorer i rummet har dimensionen tre!

|||| Eksempel 11.25 Standardbasis for talrum

En vilkårlig vektor $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ i $\mathbb{R}^4$ eller i $\mathbb{C}^4$ (det vil sige i $\mathbb{L}^4$) kan på oplagt måde skrives som en linearkombination af fire særlige vektorer i $\mathbb{L}^4$:

$$\mathbf{v} = a\,(1,0,0,0) + b\,(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,0) + d\,(0,0,0,1)\,. \tag{11-19}$$

Vi sætter $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ og $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ og konstaterer ved hjælp af (11-19), at *e*-sættet $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ udspænder $\mathbb{L}^4$.

Da det endvidere ses, at ingen af vektorerne i sættet kan skrives som en linearkombination af de øvrige, er sættet lineært uafhængigt, og $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ er dermed en basis for $\mathbb{L}^4$. Denne særlige basis kaldes en *standardbasis* for $\mathbb{L}^4$. Da antallet af basisvektorer i standard *e*-basen er fire, er $\dim(\mathbb{L}^4) = 4$.

Dette kan umiddelbart generaliseres til $\mathbb{L}^n$. For ethvert n er *e*-sættet $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, hvor

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)\,,$$

en basis for $\mathbb{L}^n$. Denne særlige basis kaldes en *standardbasis* for $\mathbb{L}^n$. Det bemærkes, at $\dim(\mathbb{L}^n) = n$.

|||| Eksempel 11.26 Standardbasis for matrix-rum

Ved *standardbasen* for vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ eller $\mathbb{C}^{2\times 3}$ forstås matrixsættet

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{11-20}$$

På samme måde defineres en *standardbasis* for et vilkårligt matrixrum $\mathbb{R}^{m\times n}$ og for et vilkårligt matrixrum $\mathbb{C}^{m\times n}$.

|||| Opgave 11.27

Gør rede for, at det matrixsæt, der i eksempel 11.26 omtales som standardbasis for $\mathbb{R}^{2\times 3}$, faktisk *er* en basis for dette vektorrum.

I det følgende eksempel og den efterfølgende sætning betragter vi igen en mængde af funktioner, nemlig mængden af *polynomier*. Systematikken i polynomier gør os i stand til at definere en særlig basis — en såkaldt *monomiebasis* — for netop dem.

|||| Eksempel 11.28 Monomiebasis for polynomiumsrum

I vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ af reelle polynomier af højst anden grad er vektorsættet $(1, x, x^2)$ en basis. Det ses på følgende måde:

1. Ethvert polynomium $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ kan skrives på formen

   $$P(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \,,$$

   det vil sige som en linearkombination af de tre vektorer i sættet.

2. Vektorsættet $(1, x, x^2)$ er lineært uafhængigt, idet ligningen

   $$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = 0 \;\; \text{forallex}$$

   ifølge ***identitetssætningen for polynomier*** kun er opfyldt, hvis alle koefficienterne a_0, a_1 og a_2 er lig med 0.

Et monomium er et polynomium med kun ét led. Derfor kaldes det ordnede sættet $(1, x, x^2)$ ***monomiebasen*** for $P_2(\mathbb{R})$, og der gælder $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$.

For ethvert n er det ordnede sæt $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ en basis for $P_n(\mathbb{R})$. Derfor gælder $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n + 1$.

Tilsvarende er det ordnede sæt $(1, z, z^2, \ldots, z^n)$ en basis for $P_n(\mathbb{C})$, og der gælder $\dim(P_n(\mathbb{C})) = n + 1$.

I mængden af plane geometriske vektorer kan man vælge *ethvert* par af to lineært uafhængige vektorer som basis. Tilsvarende udgør i rummet *ethvert* sæt af tre lineært uafhængige vektorer en basis. Vi slutter afsnittet af med en videreførsel af dette til generelle n-dimensionale vektorrum.

|||| Sætning 11.29 Tilstrækkelige betingelser for basis

I et n-dimensionalt vektorrum V udgør et vilkårligt sæt af n lineært uafhængige vektorer fra V en basis for V .

|||| Bevis

Da V er forudsat n-dimensionalt, må det have en basis bestående af n basisvektorer. Lad a-sættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ være et vilkårligt lineært uafhængigt sæt af n vektorer fra V. Sættet er da en basis for V, hvis det udspænder V. Antag, at dette ikke er tilfældet, og lad $\mathbf{v}$ være en vektor i V, som ikke tilhører $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Så må $(\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ være lineært uafhængigt, men dette er i modstrid med sætning 11.21, da der er $n+1$ vektorer i sættet. Derfor er antagelsen om, at a-sættet ikke udspænder V, forkert, og det må derfor være en basis for V.

■

|||| Opgave 11.30

I rummet er der givet to geometriske vektorer $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$ og $\mathbf{b} = (2, -2, 0)$. Bestem en vektor $\mathbf{c}$ således, at sættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er en basis for mængden af rumvektorer.

|||| Opgave 11.31

Betragt i det 4-dimensionale vektorrum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektorerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11-21}$$

Gør rede for, at $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ er et lineært uafhængigt sæt, og supplér sættet op med en (2×2)-matrix $\mathbf{D}$ således, at $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ er en basis for $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

11.5 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Koordinater hænger snævert sammen med begrebet basis. Når der i et endeligt dimensionalt (ikke-uendeligt) vektorrum er valgt en basis, kan enhver vektor i vektorrummet beskrives ved hjælp af dens koordinater med hensyn til den valgte basis. Vi får hermed et særdeles praktisk alternativ til regneoperationerne *addition* og *multiplikation med skalar*, som de oprindeligt er defineret ud fra det konkrete vektorrums anatomi. I stedet for at udføre disse særligt definerede regneoperationer, kan vi blot gennemføre taludregninger med de koordinater, der svarer til den valgte basis. Det viser sig endda, at vi kan forenkle og standardisere løsningen af typiske opgaver, som er fælles for alle vektorrum. Men først giver vi en formel indføring af koordinater med hensyn til en valgt basis.

|||| Definition 11.32 Koordinater mht. given basis

I et n-dimensionalt vektorrum V er der givet basen $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ samt en vektor $\mathbf{x}$. Vi betragter den unikke linearkombination af basisvektorerne, som $\mathbf{x}$ ifølge sætning 11.20 kan opskrives ved:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\,. \tag{11-22}$$

Koefficienterne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i (11-22) kaldes $\mathbf{x}$'s *koordinater med hensyn til basen* a, eller kortere: $\mathbf{x}$*'s* a*-koordinater*, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$${}_{a}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{11-23}$$

|||| Eksempel 11.33 Koordinater mht. en ny basis

I talrummet $\mathbb{R}^3$ er der givet en basis a ved $\big((0,0,1),(1,2,0),(1,-1,1)\big)$. Endvidere er der givet vektoren $\mathbf{v} = (7,2,6)$. Da der gælder

$$2\cdot(0,0,1) + 3\cdot(1,2,0) + 4\cdot(1,-1,1) = (7,2,6)\,,$$

ser vi, at

$${}_{a}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vektoren, som i det sædvanlige koordinatsystem har koordinatsættet $(7,2,6)$, har dermed a-koordinaterne $(2,3,4)$.

For at kunne jonglere med mange vektorers koordinater i diverse regneopgaver får vi brug for følgende vigtige sætning.

|||| Sætning 11.34 Koordinatsætningen

I et vektorrum V er der givet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt et reelt tal k. Der er endvidere valgt en basis a. Koordinaterne for en vektorsum fås ved at lægge koordinaterne for vektorerne sammen, og koordinaterne for en vektor ganget med et tal er vektorens koordinater ganget med tallet:

1. ${}_{\mathrm{a}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,.$
2. ${}_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = k\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}\,.$

|||| Bevis

Se beviset for den tilsvarende sætning 10.40 for geometriske vektorer i rummet. Beviset for det generelle tilfælde fås som en simpel udvidelse.

■

Vi udfører nu et eksempel på vektorregning ved hjælp af koordinater. Eksemplet er ikke specielt matematisk interessant, men vi gennemfører det detaljeret for at demonstrere teknikken i sætning 11.34.

|||| Eksempel 11.35 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Der er givet tre polynomier i vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$:

$$R(x) = 2 - 3x - x^2 \quad , \quad S(x) = 1 - x + 3x^2 \quad \text{og} \quad T(x) = x + 2x^2\,.$$

Bestem polynomiet $P(x) = 2R(x) - S(x) + 3T(x)\,.$

Vi løser opgaven ved hjælp af koordinaterne for polynomierne med hensyn til monomiebasen for $P_2(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{m}}P(x) &= {}_{\mathrm{m}}\big(2R(x) - S(x) + 3T(x)\big) \\
&= {}_{\mathrm{m}}(2R(x)) + {}_{\mathrm{m}}(-S(x)) + {}_{\mathrm{m}}(3T(x)) \\
&= 2\,{}_{\mathrm{m}}R(x) - {}_{\mathrm{m}}S(x) + 3\,{}_{\mathrm{m}}T(x) \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nu oversætter vi tilbage fra den fundne koordinatvektor til det ønskede polynomium:

$$P(x) = 3 - 2x + x^2\,.$$

11.6 Om brug af koordinatmatricer

Når man giver sig i kast med opgaver om vektorer og benytter sig af deres koordinater med hensyn til en given basis, fører det meget ofte til, at man opstiller et lineært ligningssystem og løser opgaven ved hjælp af matrixregning. En bestemt type matrix påkalder sig særlig opmærksomhed, nemlig den, der fremkommer, når man sætter nogle vektorers koordinatsøjler sammen til en *koordinatmatrix*:

|||| Forklaring 11.36 Koordinatmatrix for vektorsæt

Hvis der i et n-dimensionalt vektorrum V findes en basis a, og der er givet et sæt af m nummererede vektorer, så opstår sættets *a-koordinatmatrix* ved, at man i den givne rækkefølge sætter de m vektorers a-koordinatsøjler sammen til en $(n \times m)$-matrix.

Tag for eksempel et sæt bestående af tre vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,4),(5,6)\big)$. Sættets koordinatmatrix med hensyn til standard e-basen for $\mathbb{R}^2$ er 2×3-matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi vil nu vise, hvordan koordinatmatricer opstår, via en række eksempler, som vi for afvekslingens skyld tager fra forskellige vektorrum. Metoderne lader sig umiddelbart bruge på andre typer af vektorrum, og efter hvert eksempel gengiver vi metoden i en koncentreret og generel form.

Det er vigtigt for din samlede forståelse af vektorrumsteorien, at du selv øver dig i og indser, hvordan koordinatmatricer faktisk opstår, når man er i gang med typiske opgaver.

11.6.1 Afgør, om en vektor er linearkombination af andre vektorer

|||| Eksempel 11.37

Der er i $\mathbb{R}^4$ givet fire vektorer,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1,1,1,1) \\ \mathbf{a}_2 &= (1,0,0,1) \\ \mathbf{a}_3 &= (2,3,1,4) \\ \mathbf{b} &= (2,-2,0,1) \end{aligned} \tag{11-24}$$

Undersøg, om $\mathbf{b}$ er en linearkombination af $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

Vi skal undersøge, om der findes x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ således, at

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}\,. \tag{11-25}$$

Ved hjælp af sætning 11.34 kan vi omskrive (11-25) til e-koordinatvektorligningen

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\3\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

som er ensbetydende med det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Vi opstiller ligningssystemets totalmatrix og angiver (uden mellemregninger) dens trappeform:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11-26}$$

Af (11-26) ses det, at rangen af ligningssystemets koefficientmatrix er 3, mens rangen af totalmatricen er 4. Den sidste ligning er en inkonsistent ligning, og ligningssystemet har derfor ingen løsninger. Dette medfører, at (11-25) ikke kan løses. Vi konkluderer, at

$$\mathbf{b} \notin \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}\,.$$

|||| Metode 11.38 Linearkombination

Man kan afgøre, om en given vektor $\mathbf{b}$, er en linearkombination af andre vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$, ved at løse det lineære ligningssystem, hvis totalmatrix er identisk med koordinatmatricen for $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p, \mathbf{b})$ med hensyn til en given basis.

Generelt kan der være ingen, én eller uendeligt mange måder, hvorpå vektoren kan skrives som linearkombinationer af de øvrige.

11.6.2 Om vektorer er lineært afhængige

|||| Eksempel 11.39

Vi betragter i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$ de tre matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{11-27}$$

Undersøg, om de tre matricer er lineært afhængige.

Vi benytter sætning 11.17 og forsøger at finde tre reelle tal x_1, x_2 og x_3, som ikke alle er lig med 0, men som opfylder

$$x_1\mathbf{A} + x_2\mathbf{B} + x_3\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11-28}$$

Ved hjælp af sætning 11.34 kan vi omskrive (11-28) til e-koordinatvektorligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da hvert element i en matrix ved rækkeoperationer kun påvirker det tilsvarende element på *samme plads* i de andre matricer (se rækkeoperationerne nedenfor), gør det ikke noget, at vi har opstillet matricer som søjlevektorer her. Vi kan ændre det tilbage igen efterfølgende.

Dette er ensbetydende med det homogene lineære ligningssystem, hvis totalmatrix her opstilles sammen med dens trappeform (mellemregninger udelades):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11-29}$$

Af (11-29) ses, at såvel ligningssystemets koefficientmatrix som dets totalmatrix har rangen 2, og da antallet af ubekendte er større, nemlig 3, konkluderer vi, at ligningen (11-28) har uendeligt mange løsninger. Derfor er de tre matricer lineært afhængige. For eksempel kan man af $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ udlede, at

$$-3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

|||| **Metode 11.40 Lineær afhængighed eller uafhængighed**

Man kan afgøre, om vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært afhængige, ved at løse det homogene lineære ligningssystem, hvis totalmatrix er identisk med koordinatmatricen for $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{0})$ med hensyn til en given basis.

Da ligningssystemet er homogent, er der én løsning eller uendeligt mange løsninger.

- Hvis rangen af koordinatmatricen er lig med antal ubekendte p, er der én løsning, og denne løsning må være nul-løsningen. I så fald er de p vektorer derfor lineært uafhængige.
- Hvis rangen af koordinatmatricen er mindre end p, er der uendeligt mange løsninger. I så fald findes der andre løsninger end nulløsningen, og de p vektorer er derfor lineært afhængige.

11.6.3 Om et sæt af vektorer er en basis

I et n-dimensionalt vektorrum kræves der n basisvektorer, ifølge sætning 11.22. Når man bliver spurgt, om et forelagt sæt af vektorer kan være en basis, kan man straks slutte, at dette *ikke* er tilfældet, hvis antallet af vektorer i sættet er større end eller mindre end n. Da vil sættet nemlig være hhv. afhængigt eller ikke tilstrækkeligt til at udspænde rummet.

Men hvis der *er* n vektorer i sættet, behøver man ifølge sætning 11.29 kun at undersøge, om sættet er lineært uafhængigt, og her har vi allerede metode 11.40 at gå frem efter. Vi kan dog på en interessant måde videreudvikle metoden, idet vi kan bringe determinanten af vektorsættets koordinatmatrix i spil!

|||| **Eksempel 11.41**

Lad os for eksempel undersøge om polynomierne

$$P_1(x) = 1 + 2x^2 \quad , \quad P_2(x) = 2 - x + x^2 \quad \text{og} \quad P_3(x) = 2x + x^2$$

udgør en basis for $P_2(\mathbb{R})$. Da $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, er antallet af polynomier i orden. For at undersøge, om de også er lineært uafhængige, benytter vi deres koordinatvektorer med hensyn til monomiebasen og opstiller ligningen

$$x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x) + x_3 P_3(x) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som, hvis sættet er lineært uafhængigt, kun har løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, altså nul-løsningen. Ligningen er ensbetydende med et homogent lineært ligningssystem bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte. Systemets koefficientmatrix og totalmatrix er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Som for ethvert homogent lineært ligningssystem består totalmatricens højreside af lutter 0'er. Derfor er det på forhånd givet, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$, og at der *er* løsninger. Der er én løsning netop, når $\rho(\mathbf{A})$ er lig med antallet af ubekendte, det vil sige 3. Og denne løsning må da være nul-løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, idet L_{hom} *altid* indeholder nul-løsningen.

Her kan vi udnytte, at $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrix og dermed har en determinant. $\mathbf{A}$ har fuld rang netop, når den er *regulær*, altså når $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Ved udregning ses det, at $\det(\mathbf{A}) = 5$. Derfor er matricen regulær, altså har fuld rang, og der findes *kun* nulløsningen, hvorfor sættet er lineært uafhængigt. Vi konkluderer, at $\big(P_1(x), P_2(x), P_3(x)\big)$ udgør en basis for $P_2(\mathbb{R})$.

|||| Metode 11.42 Bevis for basis

Når man i et n-dimensionalt vektorrum V skal afgøre, om et vektorsæt bestående af n vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er en basis for V, behøver man blot undersøge, om sættet er lineært uafhængigt. En særlig mulighed for at undersøge dette opstår, når vektorsættets koordinatmatrix er en kvadratisk $(n \times n)$-matrix.

Sættet udgør da en basis for V netop, når determinanten af sættets koordinatmatrix med hensyn til en basis a er forskellig fra 0, kort sagt:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \text{ er en basis } \Leftrightarrow \det\big(\big[\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_1 \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_n\,\big]\big) \neq 0\,. \tag{11-30}$$

11.6.4 At finde de nye koordinater når der skiftes basis

Et teknisk problem af afgørende betydning for videregående brug af lineær algebra, er at kunne udregne nye koordinater for en vektor, når der vælges ny basis. I den sammenhæng får en såkaldt *basisskiftematrix* en vigtig rolle. Det smarte i en basisskiftematrix blev kort illustreret i eksempel 10.46. Vi demonstrerer nu i de næste to eksempler, hvordan basisskiftematricer opstår.

|||| Eksempel 11.43 Dannelse af basisskiftematrix

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet en basis a. Der vælges nu en ny basis b, som er bestemt ved sine basisvektorers a-koordinater:

$$ {}_a\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_a\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } {}_a\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. $$

Bestem a-koordinaterne for en vektor $\mathbf{v}$, som er givet ved b-koordinater således:

$$ {}_b\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{11-31} $$

Udtrykket (11-31) svarer til vektorligningen

$$ \mathbf{v} = 5\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 1\mathbf{b}_3\,. $$

Vi omsætter ligningen til en a-koordinatvektorligning og løser den:

$$ \begin{aligned} {}_a\mathbf{v} &= 5\ {}_a\mathbf{b}_1 - 4\ {}_a\mathbf{b}_2 - 1\ {}_a\mathbf{b}_3 = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} $$

Vi har undervejs i løsningen til eksempel 11.43 trukket vektorerne ud til et matrixvektorprodukt. Bemærk to ting:

- (3×3)-matricen, der indgår i dette produkt, er koordinatmatricen for b-basisvektorerne med hensyn til basen a (altså matricen består af b-basens a-koordinater).

- Den vektor, der indgår i produktet, er den oprindelige vektor $\mathbf{v}$ (altså i de oprindelige b-koordinater).

Koordinatmatricen spiller en vigtig rolle, da vi åbenbart kan finde *de nye* koordinater for en vektor ved at gange *koordinatmatricen* med vektoren i de *originale* koordinater! Matricen får således vektoren til at skifte fra ét sæt koordinater til et andet og får derfor betegnelsen *basisskiftematrix*. Den tildeles symbolet ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$. Koordinatskifterelationen kan da skrives på denne bekvemme måde:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v}\,. \tag{11-32} $$

En huskeregel er, at den basis, der er noteret på *venstre* side af en vektor eller matrix, er den basis, som vektorens eller matricens *egne* koordinater er angivet i. Det gælder for både ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}$ og ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{v}$ samt for ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$, som jo netop består af b-basisvektorerne i a-koordinater.

|||| Eksempel 11.44 Brug af basisskiftematrix

Fortsæt med det i eksempel 11.43 angivne og fundne, og bestem b-koordinaterne for en vektor $\mathbf{u}$ givet ved a-koordinater således:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{11-33} $$

Da ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ som fundet i eksempel 11.43 er en koordinatmatrix for en basis, ved vi, at den er *regulr* og dermed har en invers matrix. Vi kan derfor benytte koordinatskifterelationen (11-32) således:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} &= {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} \;\Leftrightarrow \\ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \end{aligned} $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \mathbf{E}$, som er neutral i udtrykket og forsvinder.

Det ses i eksemplet, at den inverse basisskiftematrix løser opgaven med at skifte *den anden vej*! I dette tilfælde skiftes der netop *fra* a-koordinater *til* b-koordinater. Erfaringerne samles i den følgende metode.

|||| Metode 11.45 Koordinatskifte ved basisskifte

Når der i et vektorrum er givet en basis a , og når en ny basis b kendes ud fra dens basisvektorers a-koordinater, opstilles *basisskiftematricen* ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ som er identisk med a-koordinatmatricen for b-basisvektorerne.

1. Hvis b-koordinaterne for en vektor $\mathbf{v}$ er kendte, kan dens a-koordinater findes ved matrix-vektorproduktet:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v}\,. $$

2. Hvis det omvendt er a-koordinaterne for $\mathbf{v}$ som er kendte, kan dens b-koordinater findes ved matrix-vektorproduktet:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}{}^{-1}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,. $$

   Kort sagt er den basisskiftematrix, der oversætter a-koordinater til b-koordinater, den inverse til den basisskiftematrix, der oversætter b-koordinater til a-koordinater:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{M}_{\mathrm{a}} = \left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right)^{-1}. $$

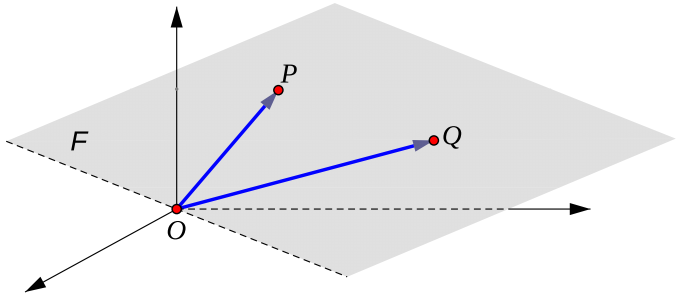
Bemærk, hvordan en basisskiftematrix fra basis a til samme basis a naturligvis blot er enhedsmatricen, da der ikke skal ændres noget:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{a}} = \left[{}_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_1 \;\; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_2 \;\; \cdots \;\; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_n\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{n\times n}\,, $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_1$ i *sine egne koordinater* selvfølgelig blot har koordinatsættet $(1, 0, \ldots, 0)$ og tilsvarende for de andre søjler.

11.7 Underrum

Ofte kommer man ud for, at en delmængde af et vektorrum i sig selv er et vektorrum. På figur 7.3 ses to stedvektorer $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OQ}$, som udspænder planen F:



Figur 7.3: En plan (2D) fortolket som et *underrum* i rummet (3D)

Da $\text{span}\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\}$ kan betragtes som et selvstændigt (2-dimensionalt) vektorrum, omtales det som et *underrum* i det (3-dimensionale) vektorrum af stedvektorer i rummet.

Definition 11.46 Underrum

En delmængde U af et vektorrum V kaldes et *underrum* i V, hvis det med de nedarvede regneoperationer fra V i sig selv er et vektorrum.

I ethvert vektorrum V kan man straks udpege to underrum:

1. V er selv et underrum i V.
2. Mængden $\{\mathbf{0}\}$ er et underrum i V.

Disse underrum kaldes de *trivielle* underrum i V.

Når man skal tjekke om en delmængde er et underrum, behøver man kun at undersøge, om stabilitetskravene er opfyldte. Det fremgår af følgende sætning.

|||| Sætning 11.47 Tilstrækkelige betingelser for underrum

En ikke tom delmængde U af et vektorrum V er et underrum i V, hvis U er *stabil* med hensyn til addition og multiplikation med skalar. Det betyder:

1. Summen af to vektorer fra U tilhører også U:
$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U\,.$$
2. Produktet af en vektor i U med en skalar tilhører også U:
$$k \in \mathbb{L}, \mathbf{u} \in U \Leftrightarrow k\mathbf{u} \in U\,.$$

|||| Bevis

Da U opfylder de to stabilitetskrav i definition 11.1, mangler vi blot at argumentere for, at U også overholder de otte regneregler i definitionen. Men dette er klart, da alle vektorer i U også er vektorer i V, hvor de gælder.

■

|||| Eksempel 11.48 Basis for et underrum

Vi betragter en delmængde M_1 af $\mathbb{R}^{2\times 2}$, som består af alle matricer af typen
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \tag{11-34}$$
hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Vi prøver at lægge to matricer af typen (11-34) sammen,
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix},$$
og ganger én af typen (11-34) med en skalar k,
$$k\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kb & ka \end{bmatrix}.$$
I begge tilfælde er den resulterende matrix af typen (11-34). Det følger derfor af sætning 11.47, at M_1 er et underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Bemærk endvidere, at M_1 udspændes af to lineært uafhængige (2×2)-matricer, idet

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Derfor er M_1 et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$, og en mulig basis for M_1 er givet ved

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

|||| Eksempel 11.49 Delmængde, som ikke er et underrum

Delmængden M_2 af $\mathbb{R}^{2\times 2}$ består af alle matricer af typen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a \cdot b & 0 \end{bmatrix}, \tag{11-35}$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Vi prøver at lægge to matricer af typen (11-35) sammen,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

og vi ganger én af typen (11-34) med en skalar,

$$3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

I ingen af tilfældene er den resulterende matrix af typen (11-35). M_2 er derfor ikke et underrum i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

11.7.1 Om udspændinger som underrum

|||| Sætning 11.50 Udspændinger er underrum

For vilkårlige vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ i et vektorrum V er $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ et underrum i V.

|||| Bevis

Stabilitetskravene er opfyldt, fordi

1. summen af to linearkombinationer af de p vektorer selv er en linearkombination af dem, og fordi
2. en linearkombination af de p vektorer ganget med en skalar selv er en linearkombination af dem.

Resten følger af sætning 11.47.

■

Løsningsmængden L_{hom} for et homogent lineært ligningssystem med n ubekendte er altid et underrum i talrummet $\mathbb{R}^n$, og dimensionen af underrummet er det samme som antallet af frie parametre i L_{hom}. Det viser vi et eksempel på nedenfor.

|||| Eksempel 11.51 L_{hom} er et underrum

Det følgende homogene lineære ligningssystem af 3 ligninger med 5 ubekendte

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_3 - 11\,x_5 &= 0 \\ x_2 + 4\,x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

har løsningmængden (mellemregninger udelades):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{11-36}$$

Vi ser her, at L_{hom} er en udspænding af to vektorer i $\mathbb{R}^5$. Den er da ifølge sætning 11.50 et underrum i $\mathbb{R}^5$. Da de to vektorer endvidere klart er lineært uafhængige, er L_{hom} et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^5$, som vi kan give basen

$$\big(\,(-2,0,1,0,0)\,,(11,-4,0,-1,1)\,\big)\,.$$

Igennem det følgende eksempel vil vi udarbejde en metode for, hvordan man kan skaffe en basis for et underrum, som udspændes af et antal givne vektorer i et vektorrum.

|||| Eksempel 11.52

Betragt i $\mathbb{R}^3$ de fire vektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,1),\ \mathbf{v}_2 = (3,0,-1),\ \mathbf{v}_3 = (-1,4,3) \text{ og } \mathbf{v}_4 = (8,-2,-4)\,.$$

Bestem en basis for underrummet

$$U = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}\ .$$

Lad $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ være en vilkårlig vektor, som tilhører U. Vi har dermed forudsat, at den følgende vektorligning har en løsning:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{b}\,. \tag{11-37}$$

Ved indsættelse af koordinatvektorerne for de fem vektorer i (11-37) ses det, at (11-37) er ækvivalent med et inhomogent lineært ligningssystem, som har totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 3 & -1 & 8 & b_1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & b_2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 2 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{11-38}$$

c_1 står for det tal, som b_1 er blevet omformet til efter de rækkeoperationer, der har ført til $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$. Tilsvarende med c_2. Bemærk, at da rangen af koefficientmatricen viser sig at være 2 med en nul-række nederst, *skal* b_3 efter rækkeoperationerne være omformet til 0. Ellers ville vi have en inkonsistent ligning, og (x_1, x_2, x_3, x_4) ville ikke kunne være en løsning som forudsat.

Det er dog især de ledende 1-taller i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$, vi skal være opmærksomme på! De viser nemlig, at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ udspænder hele U, og at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige af hinanden (de afhænger af $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ men ikke af hinanden). Begge disse observationer kan vi overbevise os om ved igen at betragte ligningen (11-37).

For det første
Antag, at vi kun havde spurgt, om $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ udspænder hele U. Så skulle vi have udeladt leddene med $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ fra (11-37), og så havde vi haft

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}_2) = \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Denne trappeform viser, at $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$. Da c_1 og c_2 kan antage ethvert reelt tal, kan $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ dermed beskrive *samtlige* vektorer af formen $\mathbf{b}$, dvs. alle vektorer i rummet U. De to vektorer alene udspænder derfor hele U.

For det andet
Antag, at vi havde spurgt, om $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige. Så skulle vi have udeladt leddene med $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ fra (11-37), og sat $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Og så havde vi fået

$$\text{trap}(\mathbf{T}_3) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

som viser, at nul-vektoren *kun* kan skrives som linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, hvis begge koefficienterne x_1 og x_2 er 0. Dermed er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uafhængige.

Samlet er det nu vist ved to forklaringer, at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en basis for U. Desuden er $\dim(U) = 2$, og tredjekoordinaten i $\mathbf{b}$ var derfor ligegyldig.

Konklusionen er, at en basis for U kan udpeges ved hjælp af de ledende 1-taller i $\text{trap}(\mathbf{T})$ uanset højreside, se (11-38). Højresiden i $\text{trap}(\mathbf{T})$ indgik oprindeligt i vores argumentation men ses nu at være uden praktisk betydning. Vi kan derfor opsummere resultatet i den følgende metode.

|||| Metode 11.53 Om at udtynde en udspænding til en basis

Når man i et vektorrum V, hvori der er valgt en basis a, skal finde en basis for underrummet

$$U = \text{span}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right\},$$

kan alt aflæses af

$$\text{trap}\left(\left[\,{}_a\mathbf{v}_1 \quad {}_a\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad {}_a\mathbf{v}_p\,\right]\right). \tag{11-39}$$

Hvis der i den i'te søjle i (11-39) ikke optræder et ledende 1-tal, så fjernes $\mathbf{v}_i$ fra sættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$. Det således udtyndede vektorsæt er en basis for U .

Da antallet af ledende 1-taller i (11-39) er lig med antallet af basisvektorer i den valgte basis for U , følger det, at

$$\text{Dim}(U) = \rho\left(\text{trap}\left(\left[\,{}_a\mathbf{v}_1 \quad {}_a\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad {}_a\mathbf{v}_p\,\right]\right)\right). \tag{11-40}$$

11.7.2 Uendeligt-dimensionale vektorrum

Inden vi afslutter denne eNote, der har dyrket brugen af baser og koordinater, må vi indrømme, at det ikke er *alle* vektorrum, der har en basis. Der findes nemlig *uendeligt-dimensionale vektorrum*!

Det kan vi indse med det følgende eksempel.

|||| Eksempel 11.54 Uendelig-dimensionalt vektorrum

Alle polynomier i vektorrummet $P_n(\mathbb{R})$ er kontinuerte funktioner. Derfor er $P_n(\mathbb{R})$ et n+1-dimensionalt underrum i vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$ af alle reelle kontinuerte funktioner. Betragt nu $P(\mathbb{R})$, mængden samtlige af reelle polynomier, der med samme begrundelse også er et underrum i $C^0(\mathbb{R})$. $P(\mathbb{R})$ må da være *uendeligt-dimensionalt*, da den for ethvert n har $P_n(\mathbb{R})$ som underrum. Af samme grund må også $C^0(\mathbb{R})$ være uendeligt-dimensionalt.

|||| Opgave 11.55

Ved $C^1(\mathbb{R})$ forstås mængden af alle differentiable funktioner af en reel variabel, som har sin kontinuert afledede på $\mathbb{R}$.

Gør rede for, at $C^1(\mathbb{R})$ er et uendeligt-dimensionalt underrum i $C^0(\mathbb{R})$.