eNote 10

Geometriske vektorer

Formålet med denne note er at give en introduktion til geometriske vektorer i planen og rummet, som sigter mod at introducere en række af de metoder, der gør sig gældende i den generelle vektorrumsteori. Nøglebegreberne er her lineær uafhængighed og lineær afhængighed, samt basis og koordinater. eNoten forudsætter kendskab til elementær plan- og rumgeometri, til lineære ligningssystemer som beskrevet i eNote 6 og til matrixalgebra som beskrevet i eNote 7. Opdateret 24.09.21 af Karsten Schmidt.

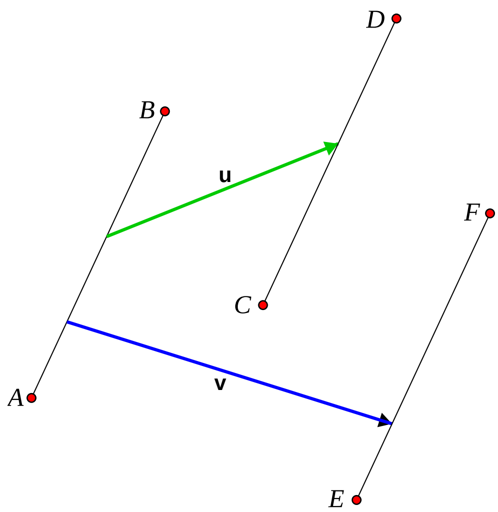
10.1 En geometrisk vektor

Ved en *geometrisk vektor* i planen eller rummet forstås et sammenhørende par af en *længde* og en *retning*. Geometriske vektorer skriver vi med små fede bogstaver, for eksempel $\mathbf{v}$.

En vektor kan repræsenteres af et *orienteret linjestykke* med et givet begyndelsespunkt og endepunkt. Hvis vektoren $\mathbf{v}$ er repræsenteret af det orienterede linjestykke fra begyndelsespunktet A til endepunktet B, benytter vi skrivemåden $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. *Alle* andre orienterede linjestykker med samme længde og retning er *også* repræsentanter for $\mathbf{v}$, selvom de måske er placeret et andet sted i planen eller rummet.

|||| Eksempel 10.1 Parallelforskydninger ved hjælp af vektorer

Geometriske vektorer kan benyttes til at angive *parallelforskydninger* i planen eller rummet. På figur 6.1 er linjestykket CD fremkommet af linjestykket AB ved, at alle punkterne på AB er blevet forskudt med vektoren $\mathbf{u}$. På samme måde er linjestykket EF fremkommet af AB ved parallelforskydning med vektoren $\mathbf{v}$.



Figur 6.1: Parallelforskydning ved hjælp af vektorer

Der gælder, at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, men bemærk for eksempel også, at $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{FE}$.

I det følgende forudsætter vi, at der er valgt et *enhedslinjestykke*, hvilket vil sige et linjestykke, der tillægges længden 1. Ved $|\mathbf{v}|$ forstås *længden* af vektoren $\mathbf{v}$ set i forhold til længden af enhedslinjestykket. $|\mathbf{v}|$ er dermed et reelt tal. Alle vektorer med samme længde som enhedslinjestykket kaldes *enhedsvektorer*.

Af praktiske grunde indføres en særlig vektor, som har længden 0 , og som ikke tillægges en retning. Den kaldes *nulvektoren* og skrives $\mathbf{0}$. For ethvert punkt A sætter vi $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. En vektor, som ikke er nulvektoren, kaldes en *egentlig* vektor.

For enhver egentlig vektor $\mathbf{v}$ defineres den *modsatte vektor* $-\mathbf{v}$ som den vektor, der har samme længde som $\mathbf{v}$ men modsat retning. Hvis $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, gælder dermed, at $\overrightarrow{BA} = -\mathbf{v}$. For nulvektoren sættes $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Det er ofte praktisk at benytte et fælles begyndelsespunkt, når forskellige vektorer skal repræsenteres af orienterede linjestykker. Man vælger derfor et fast punkt O, kaldet *origo*, og betragter vektorer ved de repræsentanter, der har O som begyndelsespunkt. Vektorer repræsenteret på denne måde kaldes *stedvektorer*, fordi der til enhver given vektor $\mathbf{v}$ hører ét unikt punkt (eller sted) P, der opfylder, at $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Tilsvarende hører der til ethvert punkt Q én unik vektor $\mathbf{u}$ således, at $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u}$.

Ved *vinklen mellem to egentlige vektorer i planen* forstår man den entydigt bestemte vinkel mellem deres stedvektorer (deres repræsentanter med samme startpunkt, nemlig udgående fra O), som ligger i intervallet $[\,0\,;\pi\,]$. Hvis en vektor $\mathbf{v}$ i planen drejes vinklen $\pi/2$ mod uret, fremkommer en ny vektor, der kaldes $\mathbf{v}$'s *tværvektor* og betegnes $\widehat{\mathbf{v}}$.

Ved vinklen mellem to egentlige vektorer *i rummet* forstås vinklen mellem deres stedvektorer i den plan i rummet, som indeholder begge stedvektorer.

Det giver god og brugbar mening "'at lægge vektorer sammen"', idet man både tager højde for vektorernes længde og deres retning. Vi vil derfor i det følgende indføre nogle regneoperationer for geometriske vektorer. I første omgang drejer det sig om de to *lineære regneoperationer*:

- addition af vektorer og
- multiplikation af vektor med en skalar (et reelt tal).

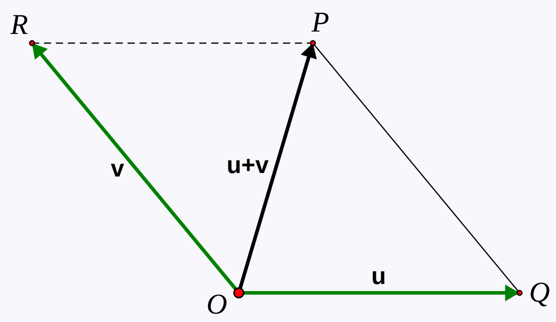
Senere skal vi se på tre forskellige måder at multiplicere vektorer med hinanden på, nemlig *prikprodukt* og for rumvektorer *krydsprodukt* og *rumprodukt*.

10.2 Addition og multiplikation med skalar

|||| Definition 10.2 Addition

Der er givet to vektorer i planen eller rummet, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Summen $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ fastlægges ved følgende metode:

- Vi vælger origo O og afsætter stedvektorerne $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$.
- Ved parallelforskydning af linjestykket OR med $\mathbf{u}$ fremkommer linjestykket QP.
- $\overrightarrow{OP}$ er da stedvektor for summen af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Kort sagt: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$.



I fysik taler man om "'kræfternes parallelogram"': Hvis et objekt er påvirket af kræfterne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, kan den *resulterende kraft* bestemmes som sumvektoren $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, hvis retning angiver den resulterende krafts retning, og hvis længde angiver kraftens størrelse. Hvis specielt $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har samme længde, men modsat retning, er den resulterende kraft lig med $\mathbf{0}$-vektoren, da de to kræfter derved netop modvirker hinanden.

Vi indfører nu multiplikation af vektor med skalar.

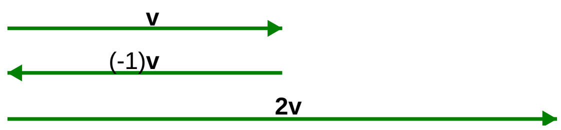
|||| Definition 10.3 Multiplikation med skalar

Der er givet en vektor $\mathbf{v}$ i planen eller rummet og en skalar k. Hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, sætter vi $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k = \mathbf{0}$. I modsat fald forstås der ved produktet $k\mathbf{v}$ følgende:

- Hvis $k > 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k$ den vektor, der har samme retning som $\mathbf{v}$, men som er k gange så lang som $\mathbf{v}$.
- Hvis $k = 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Hvis $k < 0$, så er $k\mathbf{v} = \mathbf{v}k$ den vektor, der har *modsat retning* af $\mathbf{v}$, og som er $-k = |\,k\,|$ gange så lang som $\mathbf{v}$.

|||| Eksempel 10.4 Multiplikation med skalar

En given vektor $\mathbf{v}$ ganges med henholdsvis -1 og 2 :



Figur 6.2: Multiplikation af en vektor med -1 og 2

Det følger umiddelbart af definition 10.3, at multiplikation af en vektor med -1 giver vektorens modsatte vektor,

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}\,.$$

I forlængelse heraf bruger vi skrivemåder som

$$(-5)\mathbf{v} = -(5\mathbf{v}) = -5\mathbf{v}\,.$$

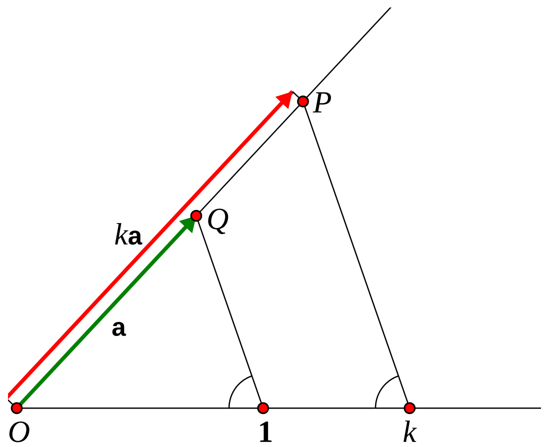
Af definition 10.3 følger umiddelbart *nulreglen* for geometriske vektorer:

$$k\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow k = 0 \;\text{ eller }\; \mathbf{v} = \mathbf{0}\,.$$

I det følgende eksempel vises, at multiplikation af en vilkårlig vektor med en vilkårlig skalar kan udføres ved ren passer/lineal-konstruktion.

|||| Eksempel 10.5 Geometrisk multiplikation

Givet en vektor $\mathbf{a}$ og et linjestykke med længden k. Konstruer vektoren $k\mathbf{a}$.



Figur 6.3: Konstruktion af multiplikation af vektor med vilkårlig skalar

Først afsættes $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}$, og linjen OQ forlænges. Derefter indlægges der med O som begyndelsespunkt en målelinje (lineal), som ikke er parallel med $\mathbf{a}$, og hvor tallene 1 og k afsættes.

Trekanten $\triangle OkP$ tegnes, så den er ensvinklet med trekanten $\triangle O1Q$. Da de to trekanter er ensvinklede, må der gælde, at $k\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$.

|||| Opgave 10.6

Der er givet to parallelle vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ samt en målelinje. Hvordan kan man med en passer og målelinjen konstruere et linjestykke, som har længden k, og som opfylder, at $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$?

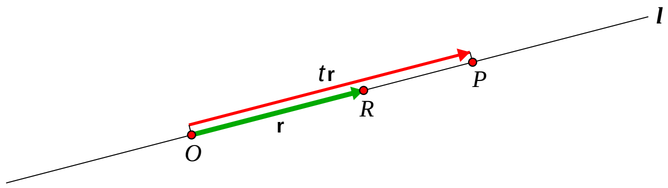
|||| Opgave 10.7

Der er givet en egentlig vektor $\mathbf{v}$, og der er givet en målelinje (lineal). Tegn vektoren $\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

Parameterfremstillinger for rette linjer i planen eller rummet opstilles ved hjælp af egentlige vektorer. Nedenfor giver vi først et eksempel på en linje, der går gennem origo, og dernæst et eksempel på en linje, der ikke gør.

|||| Eksempel 10.8 Parameterfremstilling for ret linje

Der er givet en ret linje l, som går gennem origo. Beskriv punkterne på linjen ved hjælp af en *parameterfremstilling*.



Figur 6.4: Parameterfremstilling for linje gennem origo

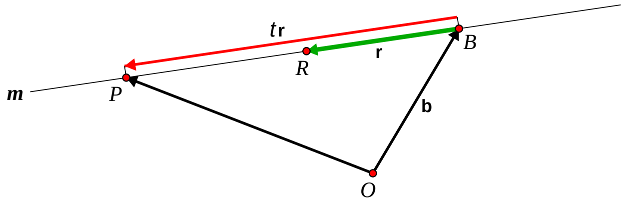
Der vælges et punkt R på l, der ikke er det samme som origo. Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$ kaldes en *retningsvektor* for l. Til ethvert punkt P på l svarer der netop ét reelt tal t, der opfylder, at $\overrightarrow{OP} = t\mathbf{r}$. Omvendt svarer der til ethvert tal t netop ét punkt P på l, så $\overrightarrow{OP} = t\mathbf{r}$. Når t gennemløber de reelle tal fra $-\infty$ til $+\infty$, vil P gennemløbe hele l i den retning, som er bestemt ved $\mathbf{r}$. Man siger, at

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in \mathbb{R} \,\}$$

er en parameterfremstilling for l.

|||| Eksempel 10.9 Parameterfremstilling for ret linje

Givet linjen m, der ikke går gennem origo. Beskriv punkterne på m ved hjælp af en parameterfremstilling.



Figur 6.5: Parameterfremstilling for linje

Først vælges et *begyndelsespunkt* B på m, og vi sætter $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Dernæst vælges et punkt $R \in m$, som ikke er det samme som B. Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{BR}$ er da en retningsvektor for m. Til ethvert punkt P på m svarer der netop ét reelt tal t, der opfylder, at $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r}$. Omvendt svarer der til ethvert tal t netop ét punkt P på l, så $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r}$. Når t gennemløber de reelle tal fra $-\infty$ til $+\infty$, vil P gennemløbe hele m i den retning, som er bestemt ved $\mathbf{r}$. Man siger, at

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in \mathbb{R} \,\}$$

er en parameterfremstilling for m.

Bemærk, at også den omvendte vektor $-\mathbf{r}$ er en gyldig retningsvektor i ovenstående eksempler.

Parameterfremstillinger som ovenfor beskriver rette linjer, der er uendeligt lange i hver retning. Men parameterfremstillinger kan afgrænses og derved også bruges til at beskrive *linjestykker*, hvilket er emnet for de følgende to opgaver.

|||| Opgave 10.10

Betragt situationen i eksempel 10.9. Indtegn det orienterede linjestykke, som har parameterfremstillingen

$$\{\, P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in [\,-1; 2\,] \,\}.$$

|||| Opgave 10.11

Givet to (ikke ens) punkter A og B. Beskriv med en parameterfremstilling det orienterede linjestykke fra A til B.

Efter disse betragtninger opstiller vi en generel sætning for en parameterfremstilling for en ret linje på et vilkårligt interval I.

|||| Metode 10.12 Parameterfremstilling for ret linje

Givet en ret linje l og to forskellige punkter R og B på l samt origo O, hvor $R \neq O$. Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{BR}$ kaldes en *retningsvektor* for l. En *parameterfremstilling* for l er da

$$l = \{\, P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + t\mathbf{r} \text{ hvor } t \in I \,\},$$

hvor $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, og I er et givent interval.

Vi får snart brug for mere avancerede regneregler for addition af geometriske vektorer og multiplikation af geometriske vektorer med skalarer end dem, vi har givet eksempler på ovenfor. Vi ridser derfor generelle regneregler op i følgende sætning og diskuterer bagefter eksempler på, hvordan regnereglerne kan begrundes ud fra de allerede definerede regneoperationer og sætninger kendt fra elementær geometri.

|||| Sætning 10.13 Regneregler

For vilkårlige geometriske vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ og for vilkårlige reelle tal k_1 og k_2 gælder følgende regneregler:

1.	$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	Addition er kommutativ
2.	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	Addition er associativ
3.	$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$	Nulvektoren er neutral ved addition
4.	$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$	Summen af en vektor og dens modsatte er $\mathbf{0}$
5.	$k_1(k_2\mathbf{u})=(k_1k_2)\mathbf{u}$	Multiplikation af vektor med skalar er associativ
6.	$(k_1+k_2)\mathbf{u}=k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{u}$	De distributive regler gælder
7.	$k_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k_1\mathbf{u}+k_1\mathbf{v}$	
8.	$1\mathbf{u}=\mathbf{u}$	Skalaren 1 er neutral i produkt med vektorer

|||| Bevis

Regnereglerne i sætning 10.13 kan illustreres og eftervises ved hjælp af geometriske konstruktioner. Lad os som eksempel tage den første regel, den kommutative lov.

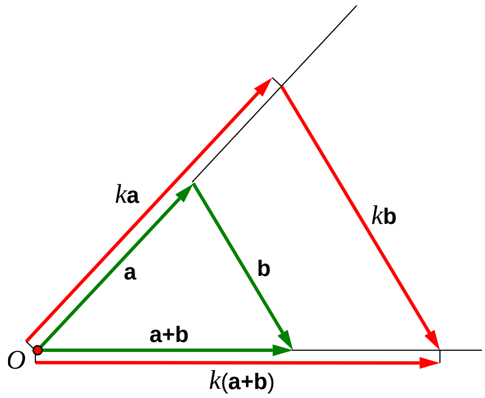
Her behøver vi blot igen at rette blikket mod figuren i definition 10.2, hvor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ er konstrueret. Hvis vi nu konstruerer $\mathbf{v}+\mathbf{u}$, skal vi parallelforskyde linjestykket OQ med v og betragte det fremkomne linjestykke RP_2. Der må gælde, at parallelogrammet $OQPR$ er identisk med parallelogrammet OQP_2R, hvorfor $P_2=P$, og dermed $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

I de følgende to opgaver opfordres læseren til selv at redegøre for to af de andre regneregler.

∎

|||| Opgave 10.14

Gør ved hjælp af figur 6.6 rede for regnereglen $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$.

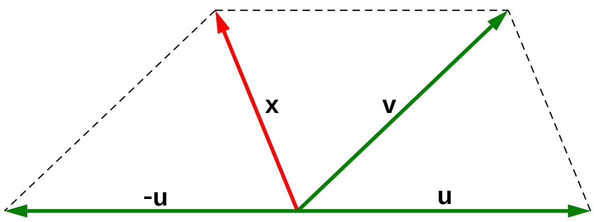


Figur 6.6: Regnereglen $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

|||| Opgave 10.15

Tegn en figur, som illustrerer regnereglen $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

For en given vektor $\mathbf{u}$ er det klart, at den modsatte vektor $-\mathbf{u}$ er den *eneste* vektor, som opfylder ligningen $\mathbf{u}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$. For to vilkårlige vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er det også klart, at der findes netop én vektor, der opfylder ligningen $\mathbf{u}+\mathbf{x} = \mathbf{v}$, nemlig vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}+(-\mathbf{u})$, hvilket illustreres på figur 6.7.



Figur 6.7: Løsningen til $\mathbf{u}+\mathbf{x} = \mathbf{v}$ er $\mathbf{x} = \mathbf{v}+(-\mathbf{u})$

Vi kan derfor indføre *subtraktion af vektorer* som en variant af addition.

|||| Definition 10.16 Subtraktion

Ved *differensen* af to vektorer **v** og **u** forstås vektoren

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})\,. \qquad (10\text{-}1)$$

Det er ikke nødvendigt at indføre en højtidelig definition for *division* af vektor med skalar. Vi betragter den blot som en omskrivning af *multiplikation* med skalar:

$$\frac{\mathbf{v}}{k} = \frac{1}{k} \cdot \mathbf{v} \quad , \; k \neq 0$$

10.3 Linearkombinationer

En pointe ved regnereglen $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ fra sætning 10.13 er, at man kan udelade parenteser, når man skal addere en række vektorer, da det ingen betydning har for den resulterende vektor, i hvilken rækkeflge man har lagt vektorerne sammen. Dette er baggrunden for *linearkombinationer*, hvor et sæt af vektorer er multipliceret med skalarer og derefter er opskrevet som en sum.

|||| Definition 10.17 Linearkombination

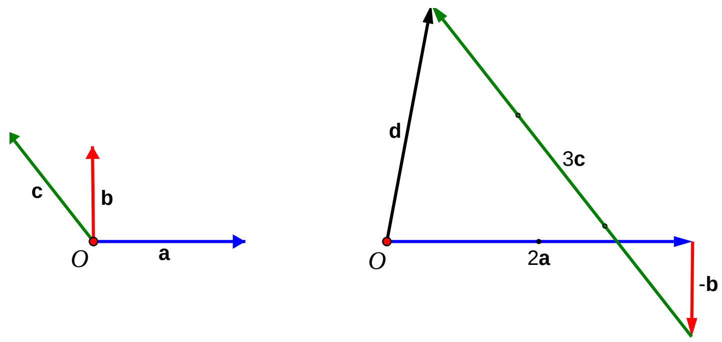
Når der er givet reelle tal $k_1, k_2, \ldots, k_n$ og i planen eller rummet vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, så kaldes summen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

en *linearkombination* af de n givne vektorer.

Hvis alle koefficienterne $k_1, \cdots, k_n$ er lig med 0, kaldes linearkombinationen *uegentlig*. Men hvis blot én af dem er forskellig fra 0, er den *egentlig*.

|||| Eksempel 10.18 Konstruktion af en linearkombination



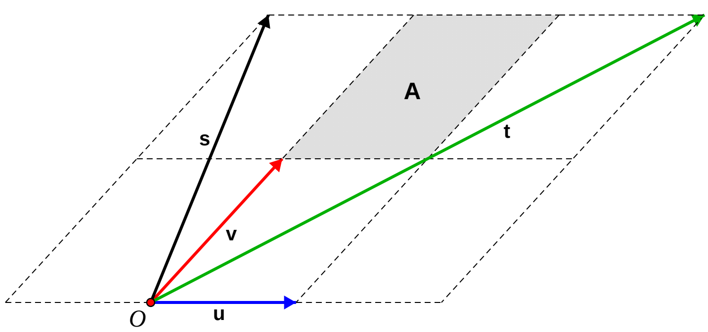
Figur 6.9: Konstruktion af linearkombination

På figur 6.9 til venstre er vektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ indtegnet. På figuren til højre har vi konstrueret linearkombinationen $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

Som eksempel 10.18 viser, beskriver en linearkombination netop blot den *nye* vektor, man får ved at forlænge andre vektorer og lægge dem sammen.

|||| Opgave 10.19

Der er i planen givet vektorerne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{s}$ og $\mathbf{t}$ samt parallelogrammet A, se figur 6.10.



Figur 6.10: Linearkombinationer

1. Opskriv $\mathbf{s}$ som en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
2. Vis, at $\mathbf{v}$ kan udtrykkes ved linearkombinationen $\mathbf{v} = \frac{1}{3}\,\mathbf{s} + \frac{1}{6}\,\mathbf{t}$.

3. Indtegn linearkombinationen $\mathbf{s} + 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

4. Bestem reelle tal a, b, c og d således, at A kan beskrives ved *parameterfremstillingen*

$$A = \{\, P \mid \overrightarrow{OP} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \text{ hvor } x \in [\,a;\, b\,] \text{ og } y \in [\,c;\, d\,]\,\}\,.$$

10.4 Lineær afhængighed og lineær uafhængighed

Hvis to vektorer har repræsentanter på den samme rette linje, siger man, at de er *lineært afhængige*. Det er klart, at to egentlige vektorer er lineært afhængige, hvis de er parallelle. I modsat fald er de *lineært uafhængige*. Vi kan formulere det således, at to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært *afhængige*, hvis den ene kan fremkomme af den anden ved multiplikation med en skalar forskellig fra 0, dvs. hvis der findes et tal $k \neq 0$ således, at

$$\mathbf{v} = k\mathbf{u}\,.$$

Kort sagt, to vektorer er lineært afhængige, "'*hvis den ene kan beskrive den anden*"'. To parallelle vektorer kan beskrive hinanden ved, at den ene kopieres og lægges til (eller trækkes fra) sig selv et vist antal gange; altså, ved at den forlænges eller forkortes.

To vinkelrette eller blot ikke-parallelle vektorer kan derimod *aldrig* beskrive hinanden, uanset hvor meget vi forlænger eller forkorter dem, da vi er nødt til at *dreje* den ene, før det bliver muligt. Disse er derfor lineært *u*afhængige.

Denne oprindelige betydning af begreberne lineær afhængighed og uafhængighed ønsker vi at generalisere sådan, at begreberne kan bruges om et vilkårligt sæt af vektorer.

|||| Definition 10.20 Lineær afhængighed og uafhængighed

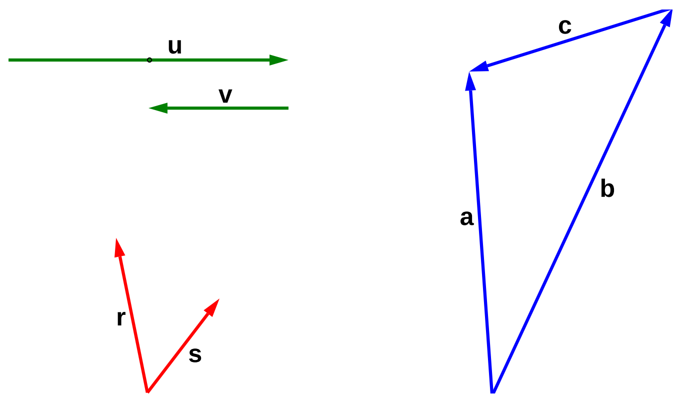
Et sæt af vektorer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, hvor $n \geq 2$, kaldes *lineært afhængigt*, hvis mindst én af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige.

Hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, kaldes sættet for lineært uafhængigt.

Et sæt, som kun består af én vektor, kaldes lineært afhængigt, hvis vektoren er $\mathbf{0}$-vektoren, og ellers lineært uafhængigt.

|||| Eksempel 10.21 Lineært afhængige og lineært uafhængige vektorsæt

I planen er givet tre vektorsæt $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ og $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, se figur 6.11.



Figur 6.11: Tre vektorsæt

Sættet $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ er lineært *afhængigt*, idet der for eksempel gælder:

$$\mathbf{u} = -2\mathbf{v}\,.$$

Også sættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er lineært *afhængigt*, da for eksempel

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{c}\,.$$

Kun sættet $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ er lineært *uafhængigt*, da der ikke findes måder, hvorpå de kan beskrive hinanden.

|||| Opgave 10.22

Gør rede for, at tre vektorer i rummet er lineært afhængige, hvis og kun hvis de har repræsentanter, som ligger i samme plan. Hvilke betingelser må tre vektorer i rummet opfylde, for at de er lineært uafhængige?

|||| Opgave 10.23

Overvej (intuitivt), hvad der er det maksimale antal vektorer, som et vektorsæt i planen kan rumme, hvis sættet skal være lineært uafhængigt. Samme spørgsmål for rummet.

Når man skal undersøge, om et sæt af vektorer er lineært uafhængigt eller lineært afhængigt, giver definition 10.20 ikke umiddelbart en praktisk fremgangsmåde. Det kan være nemmere at bruge sætningen, der følger nedenfor. Den bygger på, at et vektorsæt er lineært afhængigt, hvis og kun hvis $\mathbf{0}$-vektoren kan opskrives som en egentlig linearkombination af vektorerne. Antag som en opvarmning til sætningen, at sættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er lineært afhængigt, fordi

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}.$$

Så kan $\mathbf{0}$-vektoren fremstilles ved den egentlige linearkombination

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}\,.$$

Antag omvendt, at $\mathbf{0}$-vektoren er en egentlig linearkombination af vektorerne $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ således:

$$2\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \mathbf{0}\,.$$

Så har vi for eksempel, at

$$\mathbf{w} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$$

og dermed, at vektorerne er lineært afhængige.

|||| Sætning 10.24 Lineær uafhængighed

Lad $k_1, k_2, \ldots, k_n$ være reelle tal. At vektorsættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er lineært uafhængigt, er ensbetydende med, at ligningen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{10-2}$$

kun er opfyldt, når alle koefficienterne $k_1, k_2, \ldots, k_n$ er lig med 0.

|||| Bevis

Antag, at sættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er lineært afhængigt, og lad $\mathbf{v}_i$ være en vektor, som kan skrives som en linearkombination af de øvrige. Vi nyordner (om nødvendigt) sættet, så $i = 1$, hvorefter $\mathbf{v}_1$ kan skrives på formen

$$\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_1 - k_2\mathbf{v}_2 - \cdots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,. \tag{10-3}$$

$\mathbf{0}$-vektoren er hermed opskrevet på formen (10-2), hvor ikke alle koefficienter er 0, idet koefficienten til $\mathbf{v}_1$ er 1.

Antag omvendt, at sættet er skrevet på formen (10-2), og lad $k_i \neq 0$. Vi nyordner (om nødvendigt) sættet, så $i = 1$, hvorefter vi har

$$k_1\mathbf{v}_1 = -k_2\mathbf{v}_2 - \cdots - k_n\mathbf{v}_n \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\mathbf{v}_n\,. \tag{10-4}$$

Heraf ses det, at sættet er lineært afhængigt.

■

|||| Eksempel 10.25 Lineært afhængigt sæt

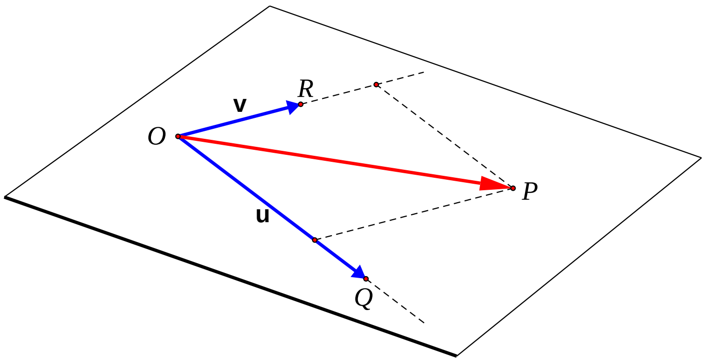
Ethvert vektorsæt, som indeholder nul-vektoren, er lineært afhængigt. Betragt for eksempel sættet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{w})$. Det er oplagt, at nul-vektoren kan skrives som linearkombination af de øvrige tre vektorer:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}\,.$$

Parameterfremstillinger for planer i rummet opstilles ved hjælp af to lineært uafhængige vektorer. Nedenfor giver vi først et eksempel på en plan, der indeholder origo, og dernæst et eksempel på en plan, der *ikke* indeholder origo.

|||| Eksempel 10.26 Parameterfremstilling for en plan

Der er givet en plan i rummet, som går gennem origo. Beskriv punkterne i planen ved hjælp af en *parameterfremstilling*.



Figur 6.12: En plan i rummet gennem origo

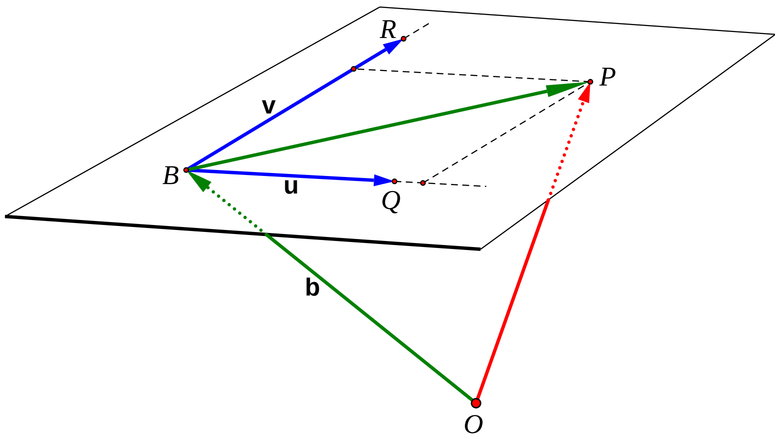
På den givne plan vælges to punkter Q og R, som ikke er origo, og som ikke ligger på en fælles linje gennem origo. Vektorerne $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ vil da være lineært uafhængige, og kaldes planens *retningsvektorer*. Til ethvert punkt P i planen findes der netop ét reelt talpar (s,t) således, at $\overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Omvendt findes der også til ethvert reelt talpar (s,t) netop ét punkt P i planen, som opfylder $\overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Man siger, at

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad , \ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

er en parameterfremstilling for den givne plan.

|||| Eksempel 10.27 Parameterfremstilling for en plan

En plan i rummet går ikke gennem origo. Beskriv den ved hjælp af en parameterfremstilling.



Figur 6.13: En plan i rummet

Først vælges der et begyndelsespunkt B i planen, og vi sætter $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Dernæst vælges der to lineært uafhængige retningsvektorer $\mathbf{u} = \overrightarrow{BQ}$ og $\mathbf{v} = \overrightarrow{BR}$, hvor Q og R ligger i planen. Til ethvert punkt P i planen findes der så netop ét reelt talpar (s,t) således, at

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,.$$

Omvendt findes der ligeledes til ethvert reelt talpar (s,t) netop ét punkt P i planen, som opfylder $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Man siger, at

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad , \ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

er en parameterfremstilling for den givne plan.

Vi anfører nu en generel metode til at opstille en parameterfremstilling for en plan. Bemærk at intervallerne, her kaldt I_1 og I_2, kan vælges frit med det formål at afgrænse planen fremfor at lade den strække sig uendeligt i hver retning.

|||| Metode 10.28 Parameterfremstilling for en plan

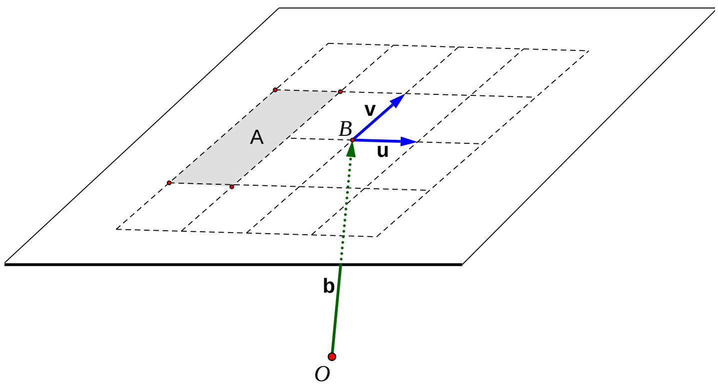
Givet en plan m og tre forskellige punkter R, B og Q på m samt origo O. Vektorerne $\mathbf{v} = \overrightarrow{BR}$ og $\mathbf{u} = \overrightarrow{BQ}$ kaldes *retningsvektorer* for m. En *parameterfremstilling* for m er da

$$m = \{ P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad \text{hvor } s \in I_1 \text{ og } t \in I_2 \} ,$$

hvor $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, og I_1 såvel som I_2 er givne intervaller.

|||| Opgave 10.29

Giv en parameterfremstilling for det i planen liggende parallelogram A, som vist i figur 6.14.



Figur 6.14: Et parallellogram i planen

10.5 De sædvanlige baser i planen og rummet

I den *analytiske geometri* viser man, hvordan tal og ligninger kan beskrive geometriske objekter og fænomener herunder vektorer. Her er begrebet *koordinater* afgørende. Det handler nemlig om, hvordan vi kan fastlægge de geometriske objekters *placering* i rummet og i forhold til hinanden ved hjælp af tal og talsæt.

For at få grundlaget i orden skal vi vælge et vist antal vektorer, som vi udnævner til *basisvektorer*. Basisvektorer er vektorer, der ved hinandens hjælp *udspænder* et rum fuldstændigt (fx et 2D- eller 3D-rum), forstået på den måde at de kan beskrive *alle* andre vektorer i dette rum. Basisvektorerne *ordnes* — dvs. arrangeres i en bestemt rækkefølge — og udgør herefter en *basis* for det pågældende rum. Når en basis er givet, kan *samtlige* vektorer, der overhovedet er mulige at lave i det pågældende rum, beskrives ved hjælp af koordinater, som er basisvektorernes koefficienter, og koordinaterne samler vi som regel i såkaldte *koordinatvektorer*.

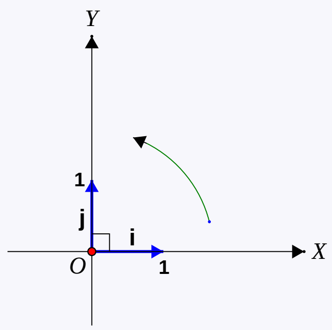
Hvordan hele denne procedure foregår, udfolder vi først gennem *standardbaserne* i planen og rummet. Senere kommer vi ind på, at det ofte kan være hensigtsmæssigt at benytte andre baser end de sædvanlige, og på hvordan relationen mellem en vektors koordinater er i forskellige baser.

|||| Definition 10.30 Standardbasis i planen

Ved en *standardbasis* eller *sædvanlig basis* for de geometriske vektorer i planen forstås et ordnet sæt af to vektorer $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, som opfylder:

- $\mathbf{i}$ har længden 1, og
- $\mathbf{j} = \widehat{\mathbf{i}}$ (det vil sige, $\mathbf{j}$ er tværvektor for $\mathbf{i}$).

Ved et *sædvanligt koordinatsystem i planen* forstås en standardbasis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ sammen med et valgt origo O. Koordinatsystemet skrives $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ved x-aksen og y-aksen forstås orienterede tallinjer gennem O, som er parallelle med henholdsvis $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$.



Figur 6.15: Sædvanligt koordinatsystem i planen

|||| Sætning 10.31 En vektors koordinater

Hvis $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ er en standardbasis, kan enhver vektor $\mathbf{v}$ i planen på netop én måde skrives som en linearkombination af $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Koefficienterne x og y i linearkombinationen kaldes $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til basen* e, eller kortere: $\mathbf{v}$*'s* e*-koordinater*, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$$_{e}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Bemærk at den basis som $\mathbf{v}$'s koordinater er udtrykt i, er angivet sænket på venstre side af vektornavnet: $_{e}\mathbf{v}$.

Man giver normalt standardbasen navnet e.

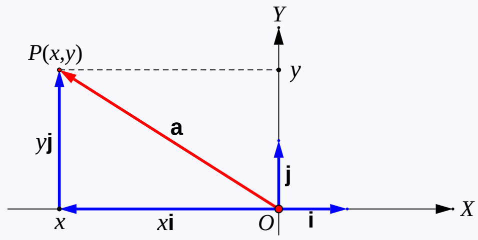
|||| Bevis

Medtages i næste opdatering af eNoten.

■

|||| Definition 10.32 Et punkts koordinater

Lad P være et vilkårligt punkt i planen, og lad $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ være et sædvanligt koordinatsystem i planen. Ved koordinaterne for P med hensyn til koordinatsystemet forstås koordinaterne for stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.



Figur 6.16: Et punkts koordinater

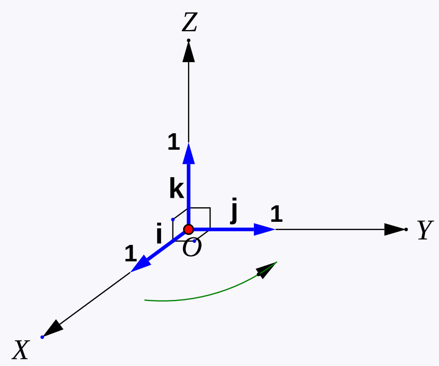
Indføringen af sædvanlig basis og koordinater for vektorer i *rummet* er en simpel udvidelse af den i planen.

|||| Definition 10.33 Standardbasis i rummet

Ved en *standardbasis* eller *sædvanlig basis* for de geometriske vektorer i rummet forstås et ordnet sæt af tre vektorer $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, som opfylder:

- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ har alle længden 1,
- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er parvist ortogonale, og
- når $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ afsættes ud fra et valgt punkt, og når vi betragter $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ fra endepunktet af $\mathbf{k}$, så overgår $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$, når $\mathbf{i}$ drejes omkring det valgte punkt med vinklen $\frac{\pi}{2}$ mod uret.

Ved et *sædvanligt koordinatsystem i rummet* forstås en standardbasis $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sammen med et valgt origo O. Koordinatsystemet skrives $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Ved x-aksen, y-aksen og z-aksen forstås orienterede tallinjer gennem origo O, som er parallelle med henholdsvis $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$.



Figur 6.17: Sædvanligt koordinatsystem i rummet

|||| Sætning 10.34 En vektors koordinater

Hvis $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ er en standardbasis, kan enhver vektor $\mathbf{v}$ i rummet på netop én måde skrives som en linearkombination af $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$:

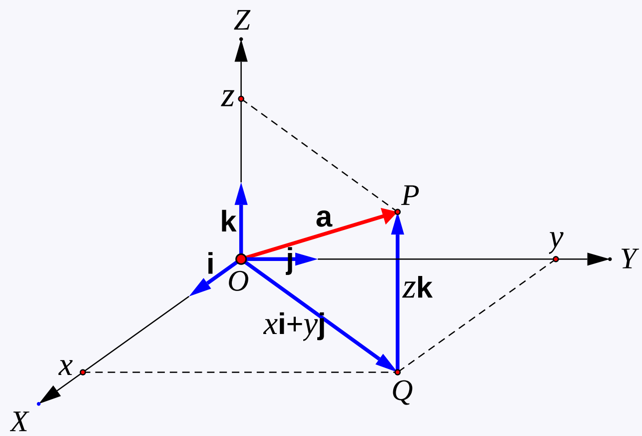
$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Koefficienterne x, y og z i linearkombinationen kaldes $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til e-basis*, eller kortere: $\mathbf{v}$'s *e-koordinater*, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$$_{e}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

|||| Definition 10.35 Et punkts koordinater

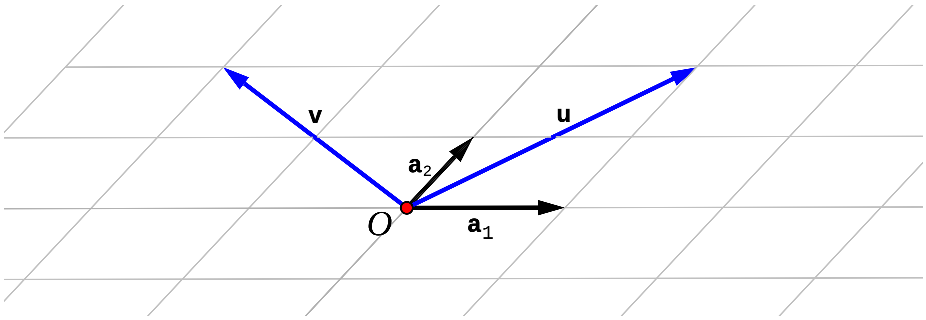
Lad P være et vilkårligt punkt i rummet, og lad $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ være et sædvanligt koordinatsystem i rummet. Ved koordinaterne for P med hensyn til koordinatsystemet forstås koordinaterne for stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.



Figur 6.18: Et punkts koordinator i rummet

10.6 Vilkårlige baser i planen og i rummet

Hvis der i planen er givet to lineært *uafhængige* vektorer, er det muligt at skrive enhver anden vektor i planen som en linearkombination af de to givne vektorer. På figur 6.19 betragter vi som eksempel de to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ samt to andre vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.



Figur 6.19: Koordinatsystem i planen med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

Vi ser, at

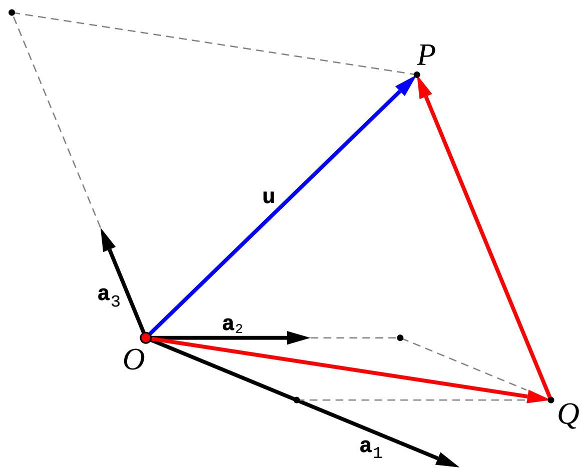
$$\mathbf{u} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \,. \tag{10-5}$$

Disse linearkombinationer er entydige, idet $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ikke kan skrives som linearkombination af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ved at benytte andre koefficienter end dem, der her indgår. Enhver anden vektor i planen kan på tilsvarende vis skrives som en entydig linearkombination af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$. Man siger, at de to vektorer $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ *udspænder* hele planen.

Dette gør det muligt at generalisere begrebet basis. I stedet for en standardbasis $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ kan vi lige såvel vælge at benytte vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ som en basis for vektorerne i planen, netop fordi sættet af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ udspænder samme plan som e. Hvis vi kalder basen a, så $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, siger man, at koefficienterne, der ses i linearkombinationerne ovenfor, er *koordinaterne* til $\mathbf{u}$ henholdsvis $\mathbf{v}$ *med hensyn til basen a*, eller kortere: $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$*'s a-koordinater*, hvilket skrives således:

$$_{a}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } {_{a}\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{10-6}$$

For mængden af geometriske vektorer i rummet går vi frem på tilsvarende måde. Er der givet tre lineært uafhængige vektorer, kan enhver vektor i rummet på entydig vis skrives som en linearkombination af de tre givne vektorer. De *udspænder* hele rummet. Vi kan derfor i samme stil vælge de tre vektorer som en basis for alle rumvektorer og udtrykke en vilkårlig rumvektor ved hjælp af koordinater med hensyn til denne basis. En fremgangsmåde til at bestemme koordinaterne er vist på figur 6.20, hvor der er givet en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ samt en vilkårlig vektor $\mathbf{u}$.



Figur 6.20: Koordinatsystem med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

Husk på, at vektorerne i en basis ikke behøver at være vinkelrette på hinanden (ortogonale), som vi ellers er vant til med den sædvanlige standardbasis både i planen og i rummet. De skal blot være *lineært uafhængige*.

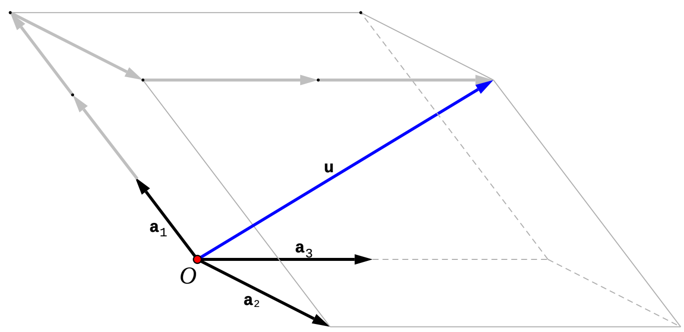
Gennem $\mathbf{u}$'s endepunkt P trækkes en linje, som er parallel med $\mathbf{a}_3$. Det punkt, hvor denne linje skærer den plan, der indeholder $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$, betegnes Q. Der findes da to tal k_1 og k_2, så $\overrightarrow{OQ} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$, fordi $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ udgør en basis i den plan, som indeholder $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$. Endvidere findes der et tal k_3, så $\overrightarrow{QP} = k_3\mathbf{a}_3$, da $\overrightarrow{QP}$ og $\mathbf{a}_3$ er parallelle. Så har vi:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3\,.$$

$\mathbf{u}$ har dermed koordinatsættet (k_1, k_2, k_3) med hensyn til basis a.

|||| Eksempel 10.36 Koordinater med hensyn til en vilkårlig basis

I rummet er der givet tre lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ som vist på figur 6.21.



Figur 6.21: Koordinatsystem med basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

Da $\mathbf{u}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ ved

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 \,, \tag{10-7}$$

så har $\mathbf{u}$ koordinaterne $(3, 1, 2)$ med hensyn til basen a givet ved $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, hvilket kort skrives som en koordinatvektor således:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} . \tag{10-8}$$

Vi samler overvejelserne om vilkårlige baser ovenfor i den følgende mere formelle definition.

|||| Definition 10.37 Vektorers koordinater med hensyn til en basis

- Ved en basis a for de geometriske vektorer i planen forstås et vilkårligt ordnet sæt af to lineært uafhængige vektorer $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Lad en vilkårlig vektor $\mathbf{u}$ være bestemt ved linearkombinationen $\mathbf{u} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$. Koefficienterne x og y kaldes $\mathbf{u}$'s *koordinater med hensyn til basis a*, eller kortere: $\mathbf{u}$*'s a-koordinater*, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

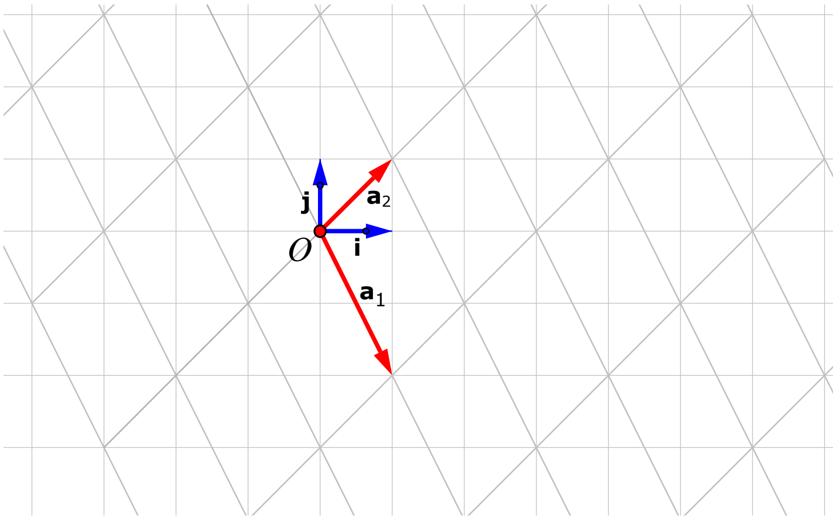
$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{10-9}$$

- Ved en basis b for de geometriske vektorer i rummet forstås et vilkårligt ordnet sæt af tre lineært uafhængige vektorer $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Lad en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ være bestemt ved linearkombinationen $\mathbf{v} = x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3$. Koefficienterne x, y og z kaldes for $\mathbf{v}$'s *koordinater med hensyn til basis b*, eller kortere: $\mathbf{v}$*'s b-koordinater*, og de samles i en *koordinatvektor* med følgende skrivemåde:

$$_{\mathrm{b}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{10-10}$$

En given vektors koordinatsæt ændres, når man skifter basis. Denne afgørende pointe tager vi hul på i den følgende opgave.

|||| Opgave 10.38



Figur 6.22: Basisskifte

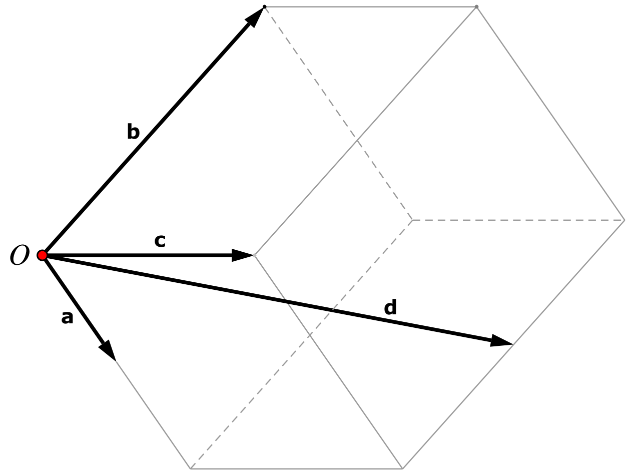
På figur 6.22 er der i planen givet standardbasis $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ samt en anden basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

1. En vektor $\mathbf{u}$ har koordinaterne $(5, -1)$ med hensyn til basis e. Bestem $\mathbf{u}$'s a-koordinater.

2. En vektor $\mathbf{v}$ har koordinaterne $(-1, -2)$ med hensyn til basis a. Bestem $\mathbf{v}$'s e-koordinater.

Bemærk hvor vigtigt det er at man er klar over, hvilken basis koordinaterne er givet i!

|||| Opgave 10.39



Figur 6.23

1. Det fremgår af figur 6.23, at **a**, **b** og **c** er lineært uafhængige. En basis m kan derfor defineres ved $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{d}$.

2. Det fremgår også af figuren, at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ er en basis. Lad os kalde denne basis n. Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{n}}\mathbf{c}$.

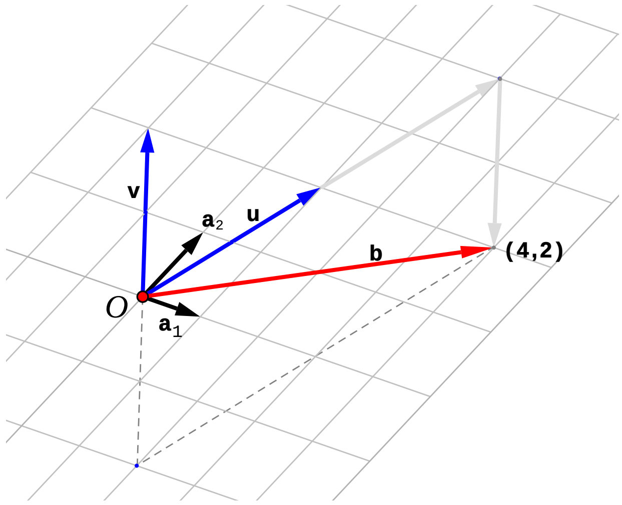
3. Indtegn med origo som begyndelsespunkt den vektor **u**, som har m-koordinaterne

$$ {}_{\mathrm{m}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . $$

10.7 Vektorregning ved hjælp af koordinater

Når man har valgt en basis for de geometriske vektorer i planen (eller i rummet), så kan alle vektorer beskrives og fastlægges ved hjælp af deres koordinater med hensyn til den valgte basis. Til de to regneoperationer addition og multiplikation med skalar, som tidligere er indført i denne eNote ved geometrisk konstruktion, får vi hermed et særdeles praktisk alternativ. I stedet for at udføre de geometriske regne-konstruktioner kan vi blot gennemføre taludregninger med de koordinater, der svarer til den valgte basis.

Vi illustrerer dette med et eksempel fra planen, hvor der er givet en basis a ved $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ samt to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ afsat ud fra O, se figur 6.24. Opgaven består i at bestemme vektoren $\mathbf{b} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, og vi vil gøre det på to forskellige måder.



Figur 6.24: Linearkombination bestemt vha. koordinater

Metode 1 (geometrisk): Vi udfører regneoperationerne som defineret i definition 10.2 og definition 10.3 ud fra de grå hjælpevektorer i figur 6.24.

Metode 2 (algebraisk): Vi aflæser koordinaterne for $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og udfører regneoperationerne direkte på koordinaterne:

$$
{}_{a}\mathbf{b} = 2\,{}_{a}\mathbf{u} - {}_{a}\,\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}. \tag{10-11}
$$

Herefter kan $\mathbf{b}$ tegnes direkte ud fra dens koordinater $(4,2)$ med hensyn til basen a.

At vi har ret til at følge denne fremgangsmåde, fremgår af den følgende sætning.

|||| Sætning 10.40 Grundlæggende koordinat-regneregler

I planen eller rummet er der givet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt et reelt tal k. Der er endvidere valgt en vilkårlig basis a. De to regneoperationer $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ og $k\,\mathbf{u}$ kan da udføres ved hjælp af koordinater således:

1. ${}_{\mathrm{a}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}$
2. ${}_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = k\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}$

Sagt med ord: Koordinaterne for en vektorsum fås ved at lægge koordinaterne for addenderne sammen. Og koordinaterne for en vektor ganget med et tal er vektorens koordinater ganget med tallet.

|||| Bevis

Vi gennemfører beviset for mængden af de geometriske rumvektorer. Antag, at koordinaterne for $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ med hensyn til den valgte basis a er givet ved

$$
{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{10-12}
$$

Vi har da:

$$
\mathbf{u} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 \tag{10-13}
$$

og dermed ifølge den kommutative, associative og distributive regel fra sætning 10.13:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3) \\
&= (u_1+v_1)\mathbf{a}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{a}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{a}_3\,,
\end{aligned} \tag{10-14}
$$

hvilket medfører, at

$$
{}_{\mathrm{a}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{u} + {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,, \tag{10-15}
$$

hvorefter første del af beviset er fuldført. Ved anden del af beviset benytter vi igen en distributiv regneregel fra sætning 10.13:

$$
k\mathbf{u} = k(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) = (k\cdot u_1)\mathbf{a}_1 + (k\cdot u_2)\mathbf{a}_2 + (k\cdot u_3)\mathbf{a}_3\,, \tag{10-16}
$$

hvilket medfører, at

$$
{}_{\mathrm{a}}(k\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} k\cdot u_1 \\ k\cdot u_2 \\ k\cdot u_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = k\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}\,, \tag{10-17}
$$

hvorefter anden del af beviset er fuldført.

■

Sætning 10.40 gør det muligt at gennemføre mere komplicerede regneopgaver ved hjælp af koordinater, som de følgende eksempler viser.

|||| Eksempel 10.41 Koordinatvektor for en linearkombination

De tre plane vektorer **a**, **b** og **c** har følgende koordinatvektorer med hensyn til en valgt basis v:

$$
{}_{v}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ {}_{v}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{v}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{10-18}
$$

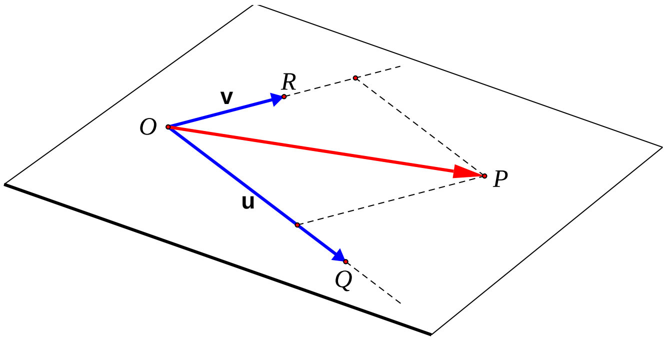
Bestem koordinatvektoren for $\mathbf{d} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ med hensyn til basis v.

Vi går frem sådan:

$$
\begin{aligned}
{}_{v}\mathbf{d} &= {}_{v}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \\
&= {}_{v}(\mathbf{a} + (-2)\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \\
&= {}_{v}\mathbf{a} + {}_{v}(-2\mathbf{b}) + {}_{v}(3\mathbf{c}) \\
&= {}_{v}\mathbf{a} - 2\,{}_{v}\mathbf{b} + 3\,{}_{v}\mathbf{c} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Her opnås det tredje lighedstegn ved første del af sætning 10.40 og det fjerde lighedstegn ved anden del af sætning 10.40.

|||| Eksempel 10.42 En plans parameterfremstilling i koordinater



Figur 6.25: En plan i rummet

Planen gennem origo, som er vist på figur 6.25, har ifølge eksempel 10.26 parameterfremstillingen

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{10-19}$$

Antag, at der i rummet er givet en basis a, og at

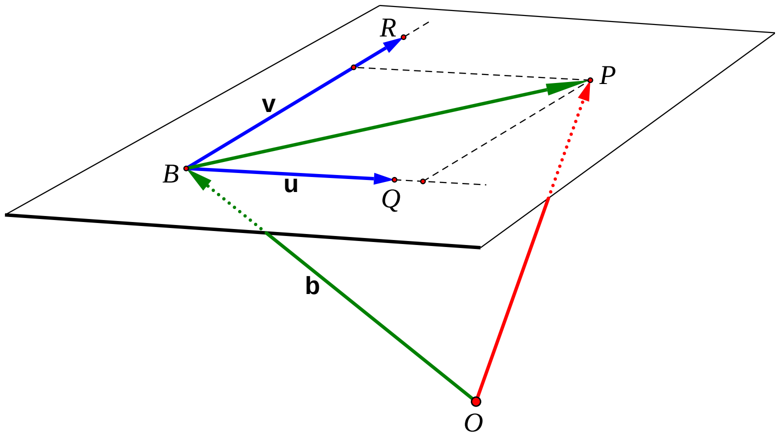
$$_{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Parameterfremstillingen (10-19) kan da skrives på koordinatform således:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \tag{10-20}$$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ og $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

|||| Eksempel 10.43 En plans parameterfremstilling i koordinater



Figur 6.26: En plan i rummet

Planen i figur 6.26 har ifølge eksempel 10.27 parameterfremstillingen

$$\{P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,;\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{10-21}$$

Antag, at der i rummet er givet en basis a, og at

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ _{\mathrm{a}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ og } _{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Parameterfremstillingen (10-21) kan da skrives på koordinatform således:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \tag{10-22}$$

hvor $_{\mathrm{a}}\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ og $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

10.8 Vektorligninger og matrixalgebra

En lang række problemer vedrørende vektorer fører til vektorligninger. Hvis vi ønsker at løse ligningerne ved hjælp af vektorernes koordinater med hensyn til en given basis, opstår der lineære ligningssystemer. Problemerne kan da løses ved hjælp af matrix-metoder, der ligger i forlængelse af eNote 6. Det viser vi eksempler på i dette afsnit, som opsummeres ved hjælp af begrebet *koordinatmatricer* (se særligt den afsluttende opgave 10.47).

|||| Eksempel 10.44 Om en vektor er en linearkombination af andre vektorer

Der er i rummet givet en basis a og tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{p}$, som med hensyn til basis a har koordinaterne

$$_a\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ _a\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \ _a\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Undersøg, om $\mathbf{p}$ er en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Vi skal undersøge, om der findes koefficienter k_1, k_2 således, at

$$k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} = \mathbf{p}\,.$$

Vi opstiller den tilsvarende koordinatvektorligning

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som er ækvivalent med det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 &= 7 \\ 5k_1 + 3k_2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{10-23}$$

Vi ser på ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og angiver (uden mellemregninger) matricens trappeform:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10-24}$$

hvor trappeformen er ækvivalent med det reducerede lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 1k_1 + 0k_2 &= -1 \\ 0k_1 + 1k_2 &= 2 \\ 0k_1 + 0k_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} k_1 &= -1 \\ k_2 &= 2\,. \end{aligned} \tag{10-25}$$

Ligningssystemet har altså netop én løsning for de to ubekendte: $k_1 = -1$ og $k_2 = 2$, hvorfor der åbenbart gælder:

$$-1\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{p}\,.$$

|||| Eksempel 10.45 Om et vektorsæt er lineært afhængigt

Der er i rummet givet en basis v og tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, som med hensyn til denne basis har koordinaterne

$$_{\mathrm{v}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ _{\mathrm{v}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ og } _{\mathrm{v}}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Undersøg, om vektorsættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er lineært afhængigt.

Vi vil undersøge, om der findes en egentlig linearkombination

$$k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} = \mathbf{0}\,,$$

da sætning 10.24 fortæller, at vektorerne er lineært *afhængige*, hvis der findes andre løsninger til denne ligning end nulløsningen $(k_1, k_2, k_3) = \mathbf{0}$. Vi ser på den tilsvarende koordinatvektorligning,

$$k_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som er ækvivalent med det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 5k_1 + k_2 + 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_3 &= 0 \\ 3k_1 + 4k_2 + k_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{10-26}$$

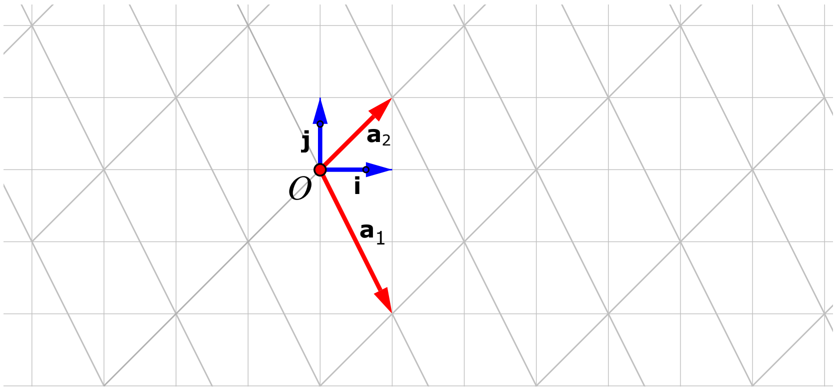
Vi opstiller ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og angiver (uden mellemregninger) matricens trappeform:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10-27}$$

Vi ser, at ligningssystemet *kun* har nulløsningen $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ og $k_3 = 0$. Det undersøgte vektorsæt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er derfor lineært *u*afhængigt. Man ville derfor kunne vælge $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ som en ny basis for mængden af rumvektorer.

I det følgende eksempel genoptager vi diskussionen om forholdet mellem koordinater og basisskifte fra opgave 10.38.

|||| Eksempel 10.46 Nye koordinater når der skiftes basis



Figur 6.27: Basisskifte

På figur 6.27 er der i planen givet en standardbasis $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ og en anden basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Når der skiftes basis, ændres givne vektorers koordinater. Her opstiller vi en systematisk metode til at udtrykke ændringen i koordinater ved hjælp af et matrixvektorprodukt. Først aflæser vi a-basisvektorernes e-koordinater:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad _{\mathrm{e}}\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10-28}$$

Antag, at en vektor $\mathbf{v}$ har koordinatsættet $_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Bestem e-koordinaterne for $\mathbf{v}$.

Vi har, at $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$, og dermed ifølge sætning 10.40:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} {_{\mathrm{a}}\mathbf{v}}\,.$$

Hvis vi sætter $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, udtrykkes $\mathbf{v}$'s e-koordinater ved matrixvektorproduktet

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \mathbf{M} \cdot {_{\mathrm{a}}\mathbf{v}}\,. \tag{10-29}$$

Det ses, at matricen **M** "'skifter basis"' på vektoren i denne operation. Vi kan med fordel tilføje en synlig markering af, at den skifter *fra* a-koordinater *til* e-koordinater, ved at skrive ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{M}_{\mathrm{a}}$. Denne notation vil blive brugt flittigt fremover.

Antag, at en vektor $\mathbf{v}$ har koordinatsættet ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Bestem a-koordinaterne for $\mathbf{v}$.

Vi benytter den allerede fundne sammenhæng (10-29) og ganger fra venstre på begge sider af ligmedtegnet med den inverse matrix til **M**. Vi får herved ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}$ isoleret som ønsket:

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot {}_{\mathrm{e}}\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1} \cdot {}_{\mathrm{e}}\mathbf{v}\,. \tag{10-30}$$

Mens **M** "'skiftede basis"' på vektoren før, er det nu $\mathbf{M}^{-1}$ der har denne rolle. Det tyder på at hvis en matrix skifter koordinater én vej, så skifter dens *inverse* matrix koordinater *den anden vej*. Dette undersøges nærmere i eNote 11 hvor vi viser:

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{M}_{\mathrm{a}} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathrm{a}}(\mathbf{M}^{-1})_{\mathrm{e}}\,.$$

|||| Opgave 10.47

Ved en *koordinatmatrix* med hensyn til en given basis a for et sæt af vektorer forstår man den matrix, der opstår, når man sætter vektorernes a-koordinatvektorer sammen til en matrix.

Beskriv matricen **T** i eksempel 10.44 og eksempel 10.45 og matricen **M** i eksempel 10.46 som koordinatmatricer.

10.9 Sætninger om vektorer i en standard e-basis

I dette afsnit arbejder vi med standard-koordinatsystemer både i planen og rummet. Vi indfører to forskellige multiplikationer mellem vektorer: *prikproduktet*, der både defineres i planen og rummet, og *krydsproduktet*, der kun defineres i rummet. Vi ser på geometriske anvendelser af disse multiplikationsformer og på geometriske fortolkninger af determinanter.

10.9.1 Prikproduktet af to vektorer

|||| Definition 10.48 Prikprodukt i planen

I planen er der givet to vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ved *prikproduktet* (eller *skalarproduktet*) af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås tallet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \,. \tag{10-31}$$

|||| Definition 10.49 Prikprodukt i rummet

I rummet er der givet to vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Ved *prikproduktet* (eller *skalarproduktet*) af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås tallet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \,. \tag{10-32}$$

For prikproduktet mellem to vektorer gælder de følgende regneregler.

|||| Sætning 10.50 Regneregler for prikprodukt

Givet tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ i planen eller rummet samt tallet k. Der gælder:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativ regel)
2. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (distributiv regel)
3. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
5. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

|||| Bevis

Reglerne 1, 2 og 3 følger af simpel koordinatudregning. Regel 4 følger af Pythagoras' sætning, og regel 5 er en direkte følge af reglerne 1, 2 og 4.

■

I de efterfølgende tre sætninger ser vi på geometriske anvendelser af prikproduktet.

|||| Sætning 10.51 Længde af en vektor

Lad $\mathbf{v}$ være en vilkårlig vektor i planen eller rummet. Længden af $\mathbf{v}$ opfylder:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,. \tag{10-33}$$

|||| Bevis

Sætningen følger umiddelbart af regneregel 4 i sætning 10.50.

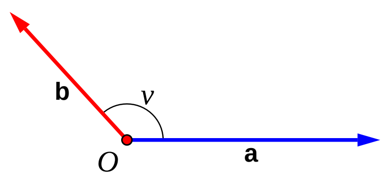
■

|||| Eksempel 10.52 Længde af en vektor

Givet vektoren $\mathbf{v}$ i rummet og, at ${}_e\mathbf{v} = (1,2,3)$. Vi har da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,.$$

Den efterfølgende sætning handler om vinklen mellem to vektorer, se figur 6.28.



Figur 6.28: Vinklen mellem to vektorer

|||| Sætning 10.53 Vinkel mellem vektorer

I planen eller rummet er der givet to egentlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Vinklen v mellem $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ opfylder:

$$\cos(v) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \tag{10-34}$$

|||| Bevis

Sætningen kan vises ud fra cosinus-relationen. Undervejs får man også brug for regel 5 i sætning 10.50. Detaljerne overlades til læseren.

■

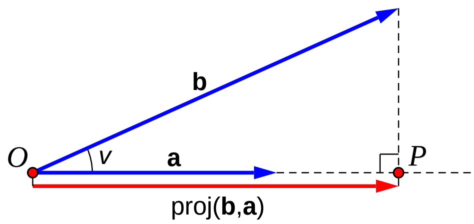
Af sætningen ovenfor følger umiddelbart følgende sætning.

|||| Følgesætning 10.54 Vinklers størrelsesforhold

Betragt situationen i figur 6.28. Der gælder:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \frac{\pi}{2}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \Leftrightarrow \text{vinkel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > \frac{\pi}{2}$

De to følgende sætninger er tilegnet *ortogonale projektioner*. På figur 6.29 er der i planen eller rummet afsat to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ud fra origo.



Figur 6.29: To vektorer afsat i planen

Betragt det vinkelrette nedfældningspunkt P af $\mathbf{b}$'s endepunkt på den linje, som indeholder $\mathbf{a}$. Ved den ortogonale projektion af $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$ forstås vektoren $\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overrightarrow{OP}$.

|||| Sætning 10.55 Længden af en projektion

Givet to egentlige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i planen eller rummet. Om længden af den ortogonale projektion af $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$ gælder:

$$|\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a})| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}. \tag{10-35}$$

Hvis du siger "'projektionen af $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$"', så er det nemt at huske rækkefølgen af vektorerne i udtrykket $\text{proj}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ ..

|||| Bevis

Ved brug af kendt sætning vedrørende retvinklede trekanter samt sætning (10.53) fås

$$|\text{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a})| = |\cos(v)|\,|\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\,.$$

■

|||| Sætning 10.56 Formel for projektionsvektor

Givet to egentlige vektorer **a** og **b** i planen eller rummet. Om den ortogonale projektion af **b** på **a** gælder:

$$\text{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}\,. \tag{10-36}$$

|||| Bevis

Hvis **a** og **b** er ortogonale, er sætningen klart opfyldt, da projektionen i så fald er nulvektoren. I modsat fald lad $sign(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ betegne fortegnet for $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Der gælder, at *sign* er positiv netop, når **a** og $\text{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a})$ er ensrettede, og negativ netop, når de er modsatrettede. Vi får derfor:

$$\text{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a}) = sign(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot|\text{proj}(\mathbf{b},\mathbf{a})|\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}\,,$$

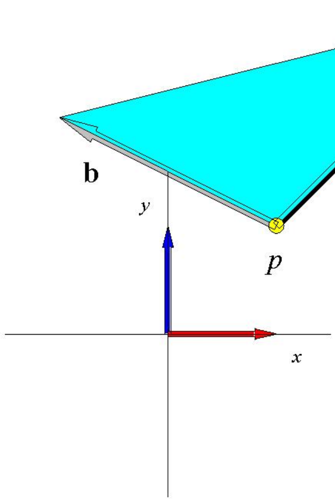
hvor vi undervejs har benyttet sætning 10.55 samt, at $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ er en enhedsvektor pegende i **a**'s retning.

■

Bemærk i beviset, at en enhedsvektor altid kan skaffes i en bestemt retning ved at dividere en vilkårlig vektor i den retning med sin egen længde.

10.9.2 Geometrisk tolkning af determinant af (2×2)-matrix

En trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er bestemt ved to vektorer afsat ud fra et fælles begyndelsespunkt p, se figur 6.30. Sætningen herunder viser, hvordan en sådan trekants areal kan udregnes vha. determinanten.



Figur 6.30: En trekant udspændt af to vektorer i planen

|||| Sætning 10.57 Areal af trekant ved determinant

Arealet af trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, hvor $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer afsat ud fra et fælles begyndelsespunkt p, er den numeriske værdi af den halve determinant af den (2×2)-matrix, der fås ved at sætte $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ind som søjler i matricen:

$$\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{1}{2} \left| \det\left([\mathbf{a} \ \mathbf{b}] \right) \right|$$

|||| Bevis

Arealet af en trekant er som bekendt *halvdelen af grundlinjen gange højden*, $\text{Areal}(\triangle) = \frac{1}{2}gh$. Vi kan vælge længden $|\mathbf{a}|$ af $\mathbf{a}$ som grundlinje, $g = |\mathbf{a}|$. Højden i trekanten er længden af $\mathbf{b}$'s projektion ind på en linje *vinkelret* på $\mathbf{a}$, dvs. $\mathbf{a}$'s *tværvektor* $\widehat{\mathbf{a}}$:

$$h = |\text{proj}(\mathbf{b}, \widehat{\mathbf{a}})| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \widehat{\mathbf{a}}|}{|\widehat{\mathbf{a}}|} \qquad (10\text{-}37)$$

jævnfør sætning 10.55. Tværvektoren er givet ved $\widehat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$. Derfor er arealet:

$$
\begin{aligned}
\text{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})) &= \frac{1}{2}hg \\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{a}|\frac{|\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{a}}|}{|\widehat{\mathbf{a}}|} \\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{a}}| \\
&= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| \\
&= \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}|\det\left([\mathbf{a}\ \mathbf{b}]\right)|\ .
\end{aligned}
\tag{10-38}
$$

Vi har benyttet ved tredje ligmedtegn, at $|\mathbf{a}| = |\widehat{\mathbf{a}}|$, og har ved femte ligmedtegn brugt formlen for determinanten af en (2×2)-matrix baglæns. Sætningen er hermed blevet bevist.

■

Af sætning 10.57 følger umiddelbart følgende.

|||| Følgesætning 10.58 Areal af parallelogram ved determinant

Arealet af det af vektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ udspændte parallelogram er lig med den numeriske værdi af determinanten af den (2×2)-matrix, der fås ved at sætte $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ind som søjler i matricen.

10.9.3 Krydsprodukt og rumprodukt

Krydsproduktet af to vektorer og *rumproduktet* af tre vektorer indføres ved hjælp af determinanter.

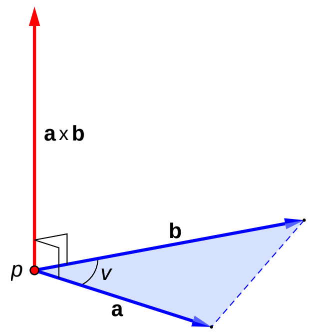
|||| **Definition 10.59 Krydsprodukt**

I rummet er der givet to vektorer ${}_e\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ og ${}_e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Ved *krydsproduktet* (eller *vektorproduktet*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ forstås vektoren $\mathbf{v}$ givet ved

$$
{}_e\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} . \tag{10-39}
$$

Krydsproduktet har en markant geometrisk betydning. Sammenhold figur 6.31 og den efterfølgende sætning.



Figur 6.31: Krydsprodukt vist geometrisk

|||| Sætning 10.60 Areal af trekant ved krydsprodukt

For to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, som har den mellemliggende vinkel v, opfylder krydsproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ følgende:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er ortogonal på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2 \cdot \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}))$.

3. Vektorsættet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ er i *højrestilling*: Set fra spidsen af $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er retningen fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ *mod* uret.

Som det sidste punkt i sætningen antyder, er faktorernes orden *ikke* ligegyldig i krydsprodukter.

Højrehåndsreglen er god til at huske højrestillinger: Grib fat med din højre hånd om vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, så tommelfingeren peger langs med vektoren i positiv retning. Dine andre fingre, der kurver omkring vektoren, peger da i retningen fra $\mathbf{a}$ imod $\mathbf{b}$.

Omvendt, hvis du tager krydsproduktet af to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, så kurv dine fingre i retningen fra $\mathbf{a}$ imod $\mathbf{b}$, og du ved straks, hvilken vej den resulterende vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ peger, nemlig langs med tommelfingeren.

Af sætning 10.60 følger umiddelbart følgende.

|||| Følgesætning 10.61 Areal af parallelogram ved krydsprodukt

Arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, er lig med $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

|||| **Definition 10.62 Rumprodukt**

Rumproduktet $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ af tre vektorer ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ og ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ defineres ved

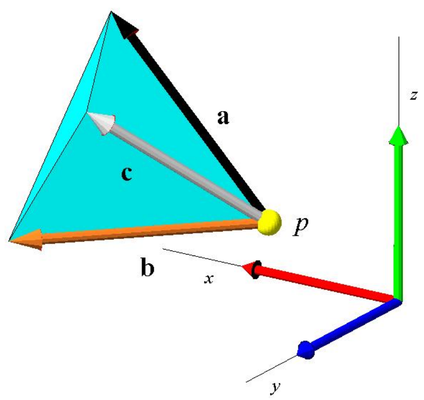
$$\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \, ,$$

hvilket videre kan udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= (c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det\left([{}_{\mathrm{e}}\mathbf{a} \ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{b} \ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{c}] \right) \, . \end{aligned} \tag{10-40}$$

10.9.4 Geometrisk tolkning af determinant af (3×3)-matrix

Et *tetraeder* $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (en "'trekantet pyramide"') er udspændt af vektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ afsat ud fra punktet p som vist i figur 6.32. Herunder gives en sætning til udregning af rumfanget af et sådant tetraeder vha. determinanten.



Figur 6.32: Et tetraeder udspændt af tre vektorer i rummet

Trekanter symboliseres sædvanligvis ved $\triangle$, tetraedre ved $\boxtimes$ og firkanter ved $\square$.

|||| Sætning 10.63 Rumfang af tetraeder

Rumfanget af tetraederet $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er

$$\operatorname{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \frac{1}{6} |\det([\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}])|\,. \tag{10-41}$$

|||| Bevis

Fra elementær rumgeometri vides, at rumfanget $\operatorname{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$ af et tetraeder $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, der er udspændt af vektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ afsat ud fra punktet p, er *en tredjedel af grundfladens areal gange højden*, $\operatorname{Vol}(\boxtimes) = \frac{1}{3}Ah$.

Vi vælger en vilkårlig af fladerne som grundflade. Arealet A af den trekantede grundflade $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ kan bestemmes vha. sætning 10.60:

$$A = \operatorname{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,.$$

Den tilhørende højde h er den vinkelrette afstand fra grundfladen til modstående spids, hvilket er lig med længden af projektionen af $\mathbf{c}$ på en vektor, der står lodret på grundfladen. Jævnfør definitionen af krydsprodukt ved vi, at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ netop står vinkelret på grundtrekanten. Denne kan derfor bruges, så højden er

$$h = |\operatorname{proj}(\mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\,. \tag{10-42}$$

Volumet bestemmes:

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \frac{1}{3}Ah \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \\ &= \frac{1}{6}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|\,. \end{aligned} \tag{10-43}$$

Sammenholdes dette med definition på rumprodukt fra sætning 10.62, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det([\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}])$, fås udtrykket på determinantform, og sætningen er bevist.

■

Et tetraeder har rumfanget 0 og er kollapset, når determinanten i (10-41) er 0. Det sker netop, når en af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de to andre, hvilket undersøges i de følgende opgaver.

|||| Definition 10.64 Regulært tetraeder

Et *regulært tetraeder* er et tetraeder, der har et egentligt rumfang; altså et rumfang, der er skarpt større end 0.

|||| Opgave 10.65

Lad $\mathbf{A}$ betegne en (2×2)-matrix med søjlevektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = [\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\,]\,. \tag{10-44}$$

Vis, at determinanten af $\mathbf{A}$ er 0, hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært afhængige i $\mathbb{R}^2$.

Et *parallelepipidum* udspændt af vektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$ kan sammensættes af de seks tetraeder:

$$\begin{array}{lll} \boxtimes(p_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \boxtimes(p_2, -\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \boxtimes(p_3, \mathbf{a}, -\mathbf{b}, \mathbf{c}), \\ \boxtimes(p_4, -\mathbf{a}, -\mathbf{b}, \mathbf{c}), & \boxtimes(p_5, -\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}) \text{ og } & \boxtimes(p_6, -\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c}). \end{array} \tag{10-45}$$

Derfor følger udmiddelbart af sætning 10.63 følgende.

|||| Følgesætning 10.66 Rumgang af parallelepipedum ved determinant

Rumfanget af et parallelepipedum, som er udspændt af vektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$, er $|\det([\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}])|$.

|||| Opgave 10.67

Lad $\mathbf{A}$ betegne en (3×3)-matrix med søjlevektorerne $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{A} = [\, \mathbf{a} \; \mathbf{b} \; \mathbf{c} \,] \,. \tag{10-46}$$

Vis, at determinanten af $\mathbf{A}$ er 0, hvis og kun hvis $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ udgør et lineært afhængigt system af vektorer i $\mathbb{R}^3$.

|||| Opgave 10.68

Benyt de geometriske tolkninger af determinanten ovenfor til at vise, at *Hadamards ulighed* herunder gælder for (2×2)-matricer og for (3×3)-matricer (faktisk er uligheden gældende for alle kvadratiske matricer):

$$\det(\mathbf{A})^2 \leq \prod_{j}^{n} \left(\sum_{i}^{n} a_{ij}^2 \right) \,. \tag{10-47}$$

Hvornår gælder der lighedstegn i (10-47)?