eNote 9

Determinanter

I denne eNote ser vi på kvadratiske matricer. Deres type er altså $n \times n$ for $n \geq 2$, se eNote 8. Det er en fordel, men ikke absolut nødvendigt, at kende determinantbegrebet for (2×2)-matricer på forhånd. Matrix-algebraen fra eNote 7 forudsættes bekendt (sum, produkt, transponering og inverse af matricer) samt den generelle løsningsmetode for linæere ligningssystemer fra eNote 6.
Opdateret 25.09.21 af Karsten Schmidt

9.1 Intro til determinanter

Determinanten af en reel *kvadratisk* $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er et reelt tal, som vi betegner med $\det(\mathbf{A})$ eller nogle gange kort med $|\mathbf{A}|$. Determinanten af en matrix kan betragtes som et mål for, hvor meget matricen "‘vejer"’ (med fortegn). Det vil vi illustrere visuelt og geometrisk for (2×2)-matricer og (3×3)-matricer i eNote 10.

Determinanten er en ganske bestemt *funktion* af de i alt n^2 tal, der står som elementer i en $(n \times n)$-matrix.

For at definere — og derefter beregne — determinant-værdien af $(n \times n)$-matricer direkte ud fra deres n^2 elementer har vi brug for to ting:

- Dels den velkendte determinant-formel for (2×2)-matricer (definition 9.1 nedenfor)

- og dels en metode til at snitte en vilkårlig $(n \times n)$-matrix op i (2×2)-matricer og derfra at beregne determinanten ud fra determinanterne af disse (2×2)-matricer.

9.2 Determinanter af $(2 \times 2)-$matricer

|||| Definition 9.1 Determinanter af (2×2)-matricer

Lad $\mathbf{A}$ være den vilkårlige (2×2)-matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \tag{9-1}$$

Så er determinanten af $\mathbf{A}$ defineret ved

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \, . \tag{9-2}$$

|||| Opgave 9.2 Invers $(2 \times 2)-$matrix

Husk, at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ til en regulær matrix $\mathbf{A}$ har den karakteristiske egenskab, at $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Vis direkte ud fra (9-1) og (9-2), at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ til en (2×2)-matrix $\mathbf{A}$ kan udtrykkes på følgende måde (når altså $\det(\mathbf{A}) \neq 0$):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} . \tag{9-3}$$

|||| Opgave 9.3 Regneregler for $(2 \times 2)-$matricer

For generelle kvadratiske matricer gælder en række fundamentale determinant-regneregler, som vil blive præsenteret i sætning 9.20 nedenfor. Tjek allerede nu de tre første ligninger i sætning 9.20 for (2×2)-matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Brug direkte udregning af begge sider af ligningerne ved hjælp af (9-2).

9.3 Snit-matricer

|||| Definition 9.4 Snitmatricer

For en $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ defineres (i, j)-*snitmatricen* $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$ som den $((n-1) \times (n-1))$-undermatrix af $\mathbf{A}$, der fremkommer ved, at hele række i og hele søjle j slettes fra matricen $\mathbf{A}$.

Hver enkelt af de i alt n^2 snit-matricer $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$ (hvor $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$) er mindre end $\mathbf{A}$, da de er af typen $(n-1) \times (n-1)$ og derfor kun indeholder $(n-1)^2$ elementer.

|||| Eksempel 9.5 Snitmatricerne for en $(3 \times 3)-$matrix

En (3×3)-matrix $\mathbf{A}$ har i alt 9 stk. (2×2)-snitmatricer $\widehat{\mathbf{A}}_{ij}$. For eksempel, hvis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} , \tag{9-4}$$

så er de 9 snitmatricer hørende til $\mathbf{A}$ givet ved

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} , \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} , \\ \widehat{\mathbf{A}}_{31} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , & \widehat{\mathbf{A}}_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{9-5}$$

Disse 9 (2×2)-snitmatricers respektive determinanter kan hver for sig direkte beregnes ud fra definitionen 9.1:

$$\begin{aligned} &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) = -7 , \quad &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) = 1 , \quad &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) = 5 , \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{21}) = -3 , &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{22}) = 0 , &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{23}) = 0 , \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{31}) = 1 , &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{32}) = -1 , &&\det(\widehat{\mathbf{A}}_{33}) = -2 . \end{aligned} \tag{9-6}$$

9.4 Induktiv definition af determinanter

Determinanten af en (3×3)-matrix kan vi bestemme ud fra determinanterne af tre af dens i alt ni snitmatricer. Generelt gælder nemlig, at determinanten af en $(n \times n)$-matrix defineres ved hjælp af determinanterne af de n snitmatricer, der hører til en frit valgt (men fast) række r. Metoden kaldes også *opløsning efter r'te række*.

|||| Definition 9.6 Determinanter defineres ved opløsning

For en vilkårlig værdi af rækkeindeks r defineres determinanten af en given $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ induktivt på følgende måde:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{rj}) \,, \tag{9-7}$$

hvor a_{rj} er elementet på plads (r, j) i $\mathbf{A}$.

Vi benytter her og senere følgende korte skrivemåder og notationer for summer og produkter af mange led:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n &= \sum_{i=1}^{n} c_i \,, \quad \text{og} \\ c_1 \cdot c_2 \cdot \quad \cdots \quad \cdot c_{n-1} \cdot c_n &= \prod_{i=1}^{n} c_i \,. \end{aligned} \tag{9-8}$$

|||| Eksempel 9.7 Opløsning af en determinant efter 1. række

Vi vil benytte definition 9.6 direkte til at beregne determinanten af den (3×3)-matrix $\mathbf{A}$, som er givet i eksempel 9.5. Vi vælger $r = 1$ og skal derfor *opløse efter første række*. Da $n = 3$, har vi således brug for de tre snitmatrix-determinanter $\det(\widehat{\mathbf{A}}_{rj})$ for $j = 1, 2, 3$, som allerede er udregnet i eksempel 9.5:

$$\begin{aligned} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) &= -7 \\ \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) &= 1 \\ \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) &= 5 \,. \end{aligned}$$

Vi har desuden brug for de tre elementer i den række, vi opløser efter, som blot aflæses af matricen:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 0 \\
a_{12} &= 2 \\
a_{13} &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Determinanten af $\mathbf{A}$ findes:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{1j}) \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) \\
&= (-1)^2 \cdot 0 \cdot (-7) + (-1)^3 \cdot 2 \cdot 1 + (-1)^4 \cdot 1 \cdot 5 \\
&= 0 - 2 + 5 = 3\,.
\end{aligned}
\tag{9-9}
$$

Læg mærke til, at snitmatricernes determinanter skal ganges med det element i $\mathbf{A}$, som står på plads (r, j), og med fortegns-faktoren $(-1)^{r+j}$, før de lægges sammen.

Hvis $\mathbf{A}$ har flere rækker hhv. søjler end tre, $n > 3$, så bliver snitmatricerne ikke (2×2)-matricer. For at finde snitmatricernes determinanter til at bruge i formlen er det selvfølgelig ikke noget problem at "‘trævle dem op"’ også efter samme formel og opnå *endnu mindre* snitmatricer. Således ender vi altid med til sidst kun at skulle bestemme vægtede summer af determinanter af (2×2)-matricer! Men vi kan dog ende med *mange* (2×2)-matricer.

|||| Opgave 9.8 Valg af "‘opløsningsrække"’ er ligegyldig

Vis direkte ved beregning, at vi får samme værdi for determinanten ved at bruge en af de andre to rækker til opløsningen af determinanten i eksempel 9.5.

|||| Definition 9.9 Alternativ: Opløsning efter søjle

Determinanten af en given $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ kan alternativt defineres induktivt ved opløsning efter en vilkårlig valgt *søjle*:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{i\,s} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{i\,s}) \,. \tag{9-10}$$

Her er opløsningen udtrykt ved *opløsning efter søjle s*.

Som det er antydet allerede med definitionerne og som vist i det konkrete tilfælde med matricen i eksempel 9.5, er det ligegyldigt, hvilken række (eller søjle) man opløser efter.

|||| Sætning 9.10 Valg af opløsnings-række eller -søjle er ligegyldig

De to definitioner 9.6 og 9.9 af determinanten af en kvadratisk matrix giver samme værdi og er uafhængige af valg af række hhv. søjle til de respektive opløsninger.

|||| Opgave 9.11 Valg af "‘opløsningssøjle"’ er ligegyldig

Vis direkte ved beregning, at vi får samme værdi for determinanten i eksempel 9.5 ved at bruge søjle-opløsning efter en vilkårlig valgt søjle i $\mathbf{A}$.

Det er selvsagt smartest at opløse efter en række (eller søjle), som indeholder en masse 0'er, netop fordi leddene i formlen ganges med elementerne i den valgte række (eller søjle). Vælges en række (eller søjle) med mange 0'er, forsvinder mange af leddene, så udregningen forsimples voldsomt.

|||| Opgave 9.12 Determinanter af nogle større matricer

Benyt de ovenfor givne anvisninger og resultater til at finde determinanten af hver af følgende matricer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}. \tag{9-11}$$

Hvis der er en række (eller søjle), hvori alle elementer på nær ét er 0, så er det klart smartest at vælge den at opløse efter. Og det er tilladt at "'skaffe"' sig en masse 0'er ved de velkendte rækkeoperationer, hvis man blot holder øje med, hvilke konstanter der divideres med, og hvor mange gange der byttes om på rækkerne. Dette behandles i sætning 9.16 og bruges i eksempel 9.17 nedenfor.

9.5 Beregningstekniske egenskaber ved determinanter

Vi samler her nogle af de vigtigste redskaber, som ofte benyttes til beregning og inspektion af determinanter af matricer.

Det er ikke svært at vise følgende sætning — fx direkte ved først at opløse efter første søjle eller efter første række, hvorefter mønsteret, som sætningen udtrykker, viser sig.

|||| Sætning 9.13 Trekantsmatricer

Hvis en $(n \times n)$-matrix har lutter 0'er over diagonalen (kaldet en *nedre* trekantsmatrix) eller lutter 0'er under diagonalen (kaldet en *øvre* trekantsmatrix), så er determinanten givet ved *produktet af diagonalelementerne*.

Specielt har vi derfor:

|||| Hjælpesætning 9.14 Determinanten af en diagonalmatrix

Lad $\mathbf{\Lambda}$ betegne en $(n \times n)$-*diagonalmatrix* med diagonal-elementerne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ og ellers med 0'er uden for diagonalen:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} . \tag{9-12}$$

Så er determinanten

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \, . \tag{9-13}$$

|||| Opgave 9.15 Determinanten af en bidiagonal-matrix

Bestem determinanten af $(n \times n)$-*bidiagonal-matricen* med vilkårligt givne værdier $\mu_1, \ldots, \mu_n$ i *bidiagonalen* (den "'omvendte"' diagonal) og ellers 0'er udenfor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{bidiag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ 0 & \cdots & \mu_2 & 0 \\ \vdots & .\cdot\cdot & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{9-14}$$

For generelle matricer og derfor også kvadratiske matricer gælder som bekendt fra eNote 6 om lineære ligningssystemer, at de kan omformes til trappeform ved brug af rækkeoperationer. Hvis man holder godt øje med, hvad der sker ved hvert skridt i den omformning, så kan determinanten af matricen direkte aflæses ud fra processen. Determinanten af en matrix opfører sig nemlig "'pænt"', selvom der udføres rækkeoperationer på matricen.

|||| Sætning 9.16 Rækkeoperationers indflydelse på determinanten

Determinanten har følgende egenskaber:

1. Hvis alle elementer i en række i $\mathbf{A}$ er 0, så er $\det(\mathbf{A}) = 0$.

2. Hvis to rækker ombyttes i $\mathbf{A}$ — dvs. $R_i \leftrightarrow R_j$ — så skifter determinanten fortegn.

3. Hvis alle elementerne i en række i $\mathbf{A}$ ganges med en konstant k — dvs. $k \cdot R_i$ — så bliver determinanten ganget med k.

4. Hvis to rækker i en matrix $\mathbf{A}$ er ens, så er $\det(\mathbf{A}) = 0$.

5. En rækkeoperation af typen $R_j + k \cdot R_i$, hvor $i \neq j$, ændrer ikke determinanten.

Som antydet ovenfor følger det af disse egenskaber ved determinantfunktionen, at den velkendte reduktion af en given matrix $\mathbf{A}$ til trappeform $\mathrm{trap}(\mathbf{A})$ via rækkeoperationer som beskrevet i eNote 6, faktisk *indeholder* en helt eksplicit beregning af determinanten af $\mathbf{A}$. Vi illustrerer med et simpelt eksempel.

|||| Eksempel 9.17 Inspektion af determinant ved reduktion til trappeform

Vi betragter (3×3)-matricen $\mathbf{A}_1$ (matricen $\mathbf{A}$ i eksempel 9.5):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9-15}$$

Vi reducerer den til trappeform på sædvanlig måde med Gauss–Jordan rækkeoperationer og holder hele tiden øje med, hvad der sker med determinanten ved at bruge reglerne fra sætning 9.16 (og ved eventuelt derudover at checke dem med direkte udregninger).

Operation: $R_1 \leftrightarrow R_2$, ombyt række et og række to.
Determinanten: Skifter fortegn.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-16}$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = -\det(\mathbf{A}_1) . \tag{9-17}$$

Operation: $\frac{1}{2}R_2$, række to ganges med $\frac{1}{2}$.
Determinanten: Ganges med $\frac{1}{2}$.

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-18}$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1)\ . \tag{9-19}$$

Operation: $R_1 - 3R_2$, række to trukket fra række et 3 gange.
Determinanten: Uændret.

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-20}$$

$$\det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1)\ . \tag{9-21}$$

Operation: $R_3 - 5R_2$, række to trukket fra række tre 5 gange.
Determinanten: Uændret.

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \tag{9-22}$$

$$\det(\mathbf{A}_5) = \det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1)\ . \tag{9-23}$$

Determinanten er nu diagonal-produktet, fordi alle elementerne under diagonalen er 0, se sætning 9.13. Vi har derfor

$$-\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{3}{2} = \det(\mathbf{A}_5) = \det(\mathbf{A}_4) = \det(\mathbf{A}_3) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_2) = -\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1)\ . \tag{9-24}$$

Heraf får vi direkte (ved at læse "′baglæns"′)

$$-\frac{1}{2}\det(\mathbf{A}_1) = -\frac{3}{2} \tag{9-25}$$

således, at

$$\det(\mathbf{A}_1) = 3\ . \tag{9-26}$$

Derudover har vi følgende sammenhæng mellem rang og determinant. Determinanten afslører nemlig, om matricen er singulær eller regulær.

|||| Sætning 9.18 Rang versus determinant

Rangen af en kvadratisk $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er skarpt mindre end n, hvis og kun hvis determinanten af $\mathbf{A}$ er 0. Med andre ord, $\mathbf{A}$ er singulær hvis og kun hvis $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Hvis en matrix indeholder en variabel (en parameter), så er determinanten af matricen en funktion af denne parameter. I anvendelserne af matrix-algebra er det ofte ret afgørende at kunne finde *nulpunkterne* for en sådan funktion. Dette er klart, da den tilhørende matrix er *singulær* for de parameterværdier, der giver determinanten værdien nul ifølge ovenstående sætning, hvilket svarer til, at der måske ikke findes en (entydig) løsning til det tilsvarende lineære ligningssystem.

|||| Opgave 9.19 Determinant af matrix med variabel

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 0 & a^2 & a^3 \\ 1 & a & a & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a \end{bmatrix} \text{ hvor } a \in \mathbb{R} \,. \tag{9-27}$$

1. Bestem determinanten af $\mathbf{A}$ som et polynomium i a.
2. Bestem rødderne i dette polynomium.
3. Find rangen af $\mathbf{A}$ for $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Hvad har rangen at gøre med de fundne rødder i determinanten?
4. Find rangen af $\mathbf{A}$ for alle a.

|||| Sætning 9.20 Regneregler for determinanter

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ betegne to $(n \times n)$-matricer. Så gælder:

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$.
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
3. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$, når blot $\mathbf{A}$ er regulær, altså $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
4. $\det(\mathbf{A}^k) = \det(\mathbf{A})^k$, for alle $k \geq 1$.
5. $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})$, når blot $\mathbf{B}$ er regulær, hvilket vil sige, at $\det(\mathbf{B}) \neq 0$.

|||| Opgave 9.21

Bevis de 3 sidste ligninger i sætning 9.20 ved at bruge ligningen $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

|||| Opgave 9.22 Determinanten af en sum er ikke determinantsummen

Vis med et simplest muligt eksempel, at determinant-funktionen det() *ikke* er additiv. Altså find to $(n \times n)$-matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ således, at

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) \,. \tag{9-28}$$

|||| Opgave 9.23 Brug af regnereglerne for determinanter

Lad a betegne et reelt tal. Der er givet følgende matricer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} . \tag{9-29}$$

1. Find $\det(\mathbf{A})$ og $\det(\mathbf{B})$.
2. Find $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$ og $\det\left((\mathbf{A}^\top\mathbf{B})^4\right)$.

3. Angiv de værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er regulær, og find for disse værdier af a udtrykket for $\det(\mathbf{A}^{-1})$.

9.6 Cramers løsningsmetode

Hvis $\mathbf{A}$ er en regulær $(n \times n)$-matrix, og $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$, så findes der (som det vides fra eNote 6) præcis én løsning $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ til det linæere ligningssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, og vi har i eNote 6 fundet metoder til at finde denne løsning.

Cramers metode til løsning af sådanne ligningssystemer er en *direkte* metode. Den består essentielt i at udregne passende determinanter af matricer, der konstrueres ud fra $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$, og så skrive løsningen ned direkte ud fra de beregnede determinanter.

|||| Sætning 9.24 Cramers løsningsformel

Lad $\mathbf{A}$ være en regulær $(n \times n)$-matrix, og lad $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ betegne en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Så findes der præcis én løsning $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ til det lineære ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;, \tag{9-30}$$

og elementerne i denne løsning er givet ved

$$x_j = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A} \dagger_j^{\mathbf{b}}) \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad , \tag{9-31}$$

hvor $\mathbf{A} \dagger_j^{\mathbf{b}}$ betegner den $(n \times n)$-matrix, der fremkommer ved at erstatte søjle j i $\mathbf{A}$ med $\mathbf{b}$.

|||| Forklaring 9.25 Hvad † betyder

Hvis $\mathbf{A}$ er matricen (fra eksempel 9.5)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} , \tag{9-32}$$

og hvis $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, så er

$$\mathbf{A}\dagger_1^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 & 2 & 1 \\ b_2 & 3 & 2 \\ b_3 & 5 & 1 \end{bmatrix} , \ \mathbf{A}\dagger_2^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 1 \\ 1 & b_2 & 2 \\ 0 & b_3 & 1 \end{bmatrix} , \ \mathbf{A}\dagger_3^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 5 & b_3 \end{bmatrix} . \tag{9-33}$$

|||| Opgave 9.26 Brug af Cramers løsningsformel

Hvis vi specielt lader $\mathbf{A}$ være den samme matrix som ovenfor i forklaring 9.25 og nu helt konkret lader $\mathbf{b} = (1, 3, 2)$, så får vi ved at indsætte $\mathbf{b}$ i (9-33) og dernæst udregne de relevante determinanter:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}\dagger_1^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \\ \det(\mathbf{A}\dagger_2^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \\ \det(\mathbf{A}\dagger_3^{\mathbf{b}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 . \end{aligned} \tag{9-34}$$

Da vi også kender $\det(\mathbf{A}) = 3$, kan vi nu konstruere løsningen til ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vha. (9-31):

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3} \cdot 4, \frac{1}{3} \cdot 1, \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) . \tag{9-35}$$

1. Tjek ved direkte indsættelse, at $\mathbf{x}$ er en løsning til $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$, og brug den direkte til løsning af ligningssystemet.
3. Løs ligningssystemet ved reduktion af totalmatricen til trappeform som øvet i eNote 6 og efterfølgende aflæsning af løsningen.

For at vise, hvad der faktisk foregår i Cramers løsningsformel, definerer vi først den *adjungerede matrix* for en matrix $\mathbf{A}$.

|||| Definition 9.27 Den adjungerede matrix

Den *adjungerede matrix* $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ defineres ved de elementer, som benyttes i definition 9.6 om determinanten for $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) & \cdots & (-1)^{1+n}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{n\,1}) & \cdots & (-1)^{n+n}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{n\,n}) \end{bmatrix}^{\top} \tag{9-36}$$

Med andre ord: elementet på plads (i,j) i den adjungerede matrix $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ er den $(-1)^{i+j}$-fortegns-modificerede determinant af (i,j)-snitmatricen, altså: $(-1)^{i+j}\det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij})$. Bemærk transponeringen i (9-36).

|||| Eksempel 9.28 En adjungeret matrix

I eksempel 9.5 betragtede vi følgende matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9-37}$$

Matricen $\mathbf{A}$ har følgende adjungerede matrix

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} , \tag{9-38}$$

som fås direkte ud fra den tidligere beregning af snitmatrix-determinanterne, som her gentages

$$\begin{aligned} &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{11}) = -7\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{12}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{13}) = 5\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{21}) = -3\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{22}) = 0\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{23}) = 0\,, \\ &\det(\widehat{\mathbf{A}}_{31}) = 1\,, \quad \det(\widehat{\mathbf{A}}_{32}) = -1\,, \det(\widehat{\mathbf{A}}_{33}) = -2\,, \end{aligned} \tag{9-39}$$

idet vi husker, dels at de enkelte elementer skal have et fortegn, der afhænger af "‘positionen"’, og dels at udtrykket (9-36) involverer en transponering.

|||| Opgave 9.29 Adjungeret versus invers matrix

Vis, at alle kvadratiske matricer $\mathbf{A}$ opfylder, at

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{E} \tag{9-40}$$

sådan, at den inverse matrix til $\mathbf{A}$ (som jo findes, netop hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$) kan findes på følgende måde:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) \quad . \tag{9-41}$$

Vink: Opgaven er ikke helt nem. Det anbefales, at man først øver sig på en (2×2)-matrix. 0'erne i enhedsmatricen i (9-40) fås ved at bruge den egenskab, at determinanten af en matrix med to ens søjler er 0.

Beviset for sætning 9.24 er nu ganske kort:

|||| Bevis

Ved at gange på begge sider af (9-30) med $\mathbf{A}^{-1}$ fås

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{b} \quad , \tag{9-42}$$

hvor resultatet fra opgave 9.29 benyttes. Vi betegner nu elementerne i $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ med α_{ij} :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad . \tag{9-43}$$

Heraf aflæses direkte

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} b_i \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij}) \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}}) \ , \end{aligned} \tag{9-44}$$

hvor vi til etablering af det sidste lighedstegn har benyttet, at

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \det(\widehat{\mathbf{A}}_{ij}) \tag{9-45}$$

lige præcis er opløsningen af $\det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}})$ efter *søjle* nummer j, altså opløsningen efter $\mathbf{b}$-søjlen i $\det(\mathbf{A}\dagger_j^{\mathbf{b}})$ (se definition 9.9).