

## ||| eNote 8

# Kvadratiske matricer

*I denne eNote undersøges grundlæggende egenskaber ved mængden af kvadratiske matricer herunder indførelse af en invers matrix for visse kvadratiske matricer. Det forudsættes, at man kender til de basale matrixoperationer, se for eksempel eNote 7.*

*Opdateret 24.10.21 af Karsten Schmidt*

## 8.1 Kvadratiske matricer

Kvadratiske matricer er ganske enkelt matricer, som har *lige mange rækker og søjler*, så de er af typen  $n \times n$ . Noter her vil introducere nogle af de grundlæggende operationer, der findes med kvadratiske matricer.

En kvadratisk  $n \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  ser således ud:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (8-1)$$

Elementer  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  siges at stå i *hoveddiagonalen* eller bare *diagonalen* i  $\mathbf{A}$ .

En kvadratisk matrix  $\mathbf{D}$ , som kun har elementer forskellige fra nul i hoveddiagonalen, kaldes en *diagonalmatrix*, og man kan betegne den  $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

En *symmetrisk matrix*  $\mathbf{A}$  er en kvadratisk matrix, som er lig sin egen transponerede, altså  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

Den kvadratiske matrix, som har 1-taller i hoveddiagonalen og nuller ellers, kaldes for *enhedsmatricen* uanset antallet af rækker og søjler. Enhedsmatricen betegnes med  $\mathbf{E}$ . Man har altså, at

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-2)$$



I udenlandsk litteratur betegnes enhedsmatricen ofte med  $\mathbf{I}$  (identity matrix).

### ||| Sætning 8.1    **Enhedsmatricen**

Enhedsmatricen  $\mathbf{E}$  i  $\mathbb{R}^{n \times n}$  er den eneste matrix i  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , som opfylder

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A} \quad (8-3)$$

for en vilkårlig matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### ||| **Bevis**

Man kan forestille sig en anden matrix  $\mathbf{D}$ , hvor samme sammenhænge var gældende, altså at  $\mathbf{AD} = \mathbf{DA} = \mathbf{A}$  for en vilkårlig matrix  $\mathbf{A}$ . Denne vilkårlige matrix kunne være enhedsmatricen, og sammenfatter man så de to ligninger får man:  $\mathbf{D} = \mathbf{ED} = \mathbf{DE} = \mathbf{E}$ .

Da  $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ , findes der altså ikke andre matricer end enhedsmatricen  $\mathbf{E}$ , der er et neutralt element for matrixproduktet. ■



Enhedsmatricen kan betragtes som "matricernes 1-tal": Ligesom man ikke ændrer en skalar ved at gange den med 1, ændrer man ikke en matrix ved at lave matrixproduktet af matricen med enhedsmatricen af samme type.

Som det vil fremgå af det følgende, er det ofte ved brug af kvadratiske matricer afgørende, om de har fuld rang eller ej. Derfor indfører vi nu særlige begreber til at udtrykke dette.

**||| Definition 8.2 Regulær og singulær matrix**

En kvadratisk matrix kaldes *regulær*, hvis den har fuld rang, det vil sige, at  $\rho(\mathbf{A}_{n \times n}) = n$ .

En kvadratisk matrix kaldes *singulær*, hvis den *ikke* har fuld rang, det vil sige, at  $\rho(\mathbf{A}_{n \times n}) < n$ .

## 8.2 Invers matrix

Den reciprokke til en skalar  $a \neq 0$  opfylder følgende ligning:  $a \cdot x = 1$ , hvor  $x$  er den reciprokke. Man kan omskrive det til, at  $x = a^{-1}$ . Denne idé vil vi nu generalisere til kvadratiske matricer. Læg her mærke til, at man ikke kan bestemme den reciprokke til en skalar  $a$ , hvis  $a = 0$ . En lignende undtagelse dukker op, når vi generaliserer til kvadratiske matricer.

Til at bestemme den "reciprokke matrix" til en matrix  $\mathbf{A}$ , kaldet  $\mathbf{A}$ 's inverse matrix, opstilles en *matrixligning* svarende til  $a \cdot x = 1$ :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E}. \quad (8-4)$$

Den ubekendte  $\mathbf{X}$  er en matrix. Hvis der findes en løsning  $\mathbf{X}$ , betegnes den  $\mathbf{A}^{-1}$  og kaldes den *inverse matrix* til  $\mathbf{A}$ . Vi ønsker altså at finde en bestemt matrix kaldet  $\mathbf{A}^{-1}$ , som netop opfylder, at matrixproduktet af  $\mathbf{A}$  med den giver enhedsmatricen.

Det er dog ikke alle kvadratiske matricer, som har en invers matrix. Det postuleres i følgende sætning.

**||| Sætning 8.3 Invers matrix**

En kvadratisk matrix  $\mathbf{A}_{n \times n}$  har en invers matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ , der opfylder  $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ , hvis og kun hvis  $\mathbf{A}$  er regulær.

Den inverse matrix bestemmes entydigt ved løsning af matrixligningen  $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ , hvor  $\mathbf{X}$  er den ubekendte.

I den følgende metode forklares, hvordan man løser den før beskrevne matrixligning (8-4), og derved finder den inverse, såfremt matricen er regulær.

### ||| Metode 8.4 At bestemme den inverse matrix

Man bestemmer den inverse matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  til den regulære kvadratiske matrix  $\mathbf{A}$  ved hjælp af *matrixligningen*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E}. \quad (8-5)$$

Ligningen løses med hensyn til den ubekendte  $\mathbf{X}$  på følgende måde:

1. Totalmatricen  $\mathbf{T} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{E}]$  opstilles.
2. Ved sædvanlig GaussJordan-elimination bestemmes trappeformen  $\text{trap}(\mathbf{T})$  af  $\mathbf{T}$ .
3. Ved eliminationen dannes til slut enhedsmatricen på venstre side af den lodrette streg, mens løsningen (den inverse til  $\mathbf{A}$ ) kan aflæses på højre side:  $\text{trap}(\mathbf{T}) = [\mathbf{E} \mid \mathbf{X}] = [\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ .

### ||| Eksempel 8.5 Invers matrix



Bestem den inverse matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  til matricen  $\mathbf{A}$ , som er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-6)$$

Dette kan gøres ved hjælp af metode 8.4. Først opstilles totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{E}] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -16 & 9 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (8-7)$$

Nu danner vi det ledende 1-tal i første række. Først rækkeoperationen  $R_1 + R_2$  og derefter  $R_1 + 4 \cdot R_3$ . Det giver

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -7 & 4 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (8-8)$$

Så fjernes tallene i første søjle af anden og tredje række ved  $R_2 - 9 \cdot R_1$  og  $R_3 - 2 \cdot R_1$ . Endvidere ombyttes anden og tredje række,  $R_2 \leftrightarrow R_3$ . Vi får da

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -7 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \end{array} \right]. \quad (8-9)$$

Nu ændrer vi fortegnet på række to,  $(-1) \cdot R_2$ , og fjerner dernæst tallet i anden søjle af tredje række,  $R_3 + 5 \cdot R_2$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 6 & -9 & -8 & -36 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right]. \quad (8-10)$$

Sidste skridt er da at færdiggøre tredje søjle ved  $R_2 + R_3$ ,

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right]. \quad (8-11)$$

Det ses, at  $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 3$ , altså har  $\mathbf{A}$  fuld rang, og derfor kan man aflæse den inverse til  $\mathbf{A}$  på højresiden af den lodrette streg,

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right]. \quad (8-12)$$



Læg mærke til, at venstresiden af  $\text{trap}(\mathbf{T})$  er enhedsmatricen. Den er altså i løbet af reduktionen "flyttet" fra højre til venstre side af lighedstegnene (den lodrette streg).

Til sidst kontrollerer vi, om  $\mathbf{A}^{-1}$  som forventet opfylder  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$  og  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -16 & 9 & -10 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & -5 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \quad (8-13) \\ &= \begin{bmatrix} -16 + 27 - 10 & -16 + 36 - 20 & -64 + 54 + 10 \\ 9 - 15 + 6 & 9 - 20 + 12 & 36 - 30 - 6 \\ 2 - 3 + 1 & 2 - 4 + 2 & 8 - 6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Det passer! Ved brug af samme fremgangsmåde ses, at også  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$  passer.

Som man kan se i næste eksempel, kan man bruge den inverse til at løse matrixligninger med kvadratiske matricer. I matrixligninger kan man nemlig også *bytte rundt på led og gange med skalarer* for at isolere den ubekendte ligesom i almindelige lineære ligninger med skalarer. Ydermere kan man *gange igennem* med matricer – dette kan enten gøres

fra højre eller venstre på alle leddene i ligningen, hvilket giver forskellige resultater.

### ||| Eksempel 8.6 Matrixligning



Løs matrixligningen

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX}, \quad (8-14)$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -12 & 7 & -9 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}. \quad (8-15)$$

Først reduceres ligningen så meget som muligt, se eventuelt sætning 7.13:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX} \Leftrightarrow \mathbf{AX} + \mathbf{CX} = \mathbf{B} - \mathbf{CX} + \mathbf{CX} \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (8-16)$$

Da  $\mathbf{X}$  er den ubekendte, vil vi prøve at isolere den helt. Er  $(\mathbf{A} + \mathbf{C})$  en regulær matrix, kan man gange med den inverse til  $(\mathbf{A} + \mathbf{C})$  fra venstre på begge sider af lighedstegnet. Altså

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{EX} = \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}, \quad (8-17)$$

fordi  $(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \mathbf{E}$  ifølge definitionen på inverse matricer. Vi laver nu matrixsummen  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$  og ser, om matricen er regulær:

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 7 & -9 \\ 0 & -10 & 11 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-18)$$

Den inverse til denne matrix er allerede bestemt i eksempel 8.5, og den del af proceduren springes derfor over.  $\mathbf{X}$  kan da bestemmes:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -16 & 9 & -10 \\ 9 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & -12 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -11 & 5 \\ 62 & -45 & 20 \\ 11 & -23 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8-19)$$

For videre undersøgelse af invertibilitet af den transponerede eller inverse af en regulær matrix samt invertibilitet af produktet af to eller flere regulære matricer får vi brug for

følgende hjælpesætning, der anføres uden bevis.

### ||| **Hjælpesætning 8.7 Arvet regularitet**

1. Hvis og kun hvis  $\mathbf{A}$  er en regulær kvadratisk matrix, er såvel  $\mathbf{A}^\top$  som  $\mathbf{A}^{-1}$  også regulære.
2. Produktet  $\mathbf{AB}$  af to kvadratiske matricer er regulært, hvis og kun hvis både  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er regulære.

Vi kan herefter opstille regneregler for inverse matricer.

### ||| **Sætning 8.8 Regneregler ved invers matrix**

For de regulære kvadratiske matricer  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{C}$  gælder der følgende regneregler:

1. Den inverse til den inverse af en matrix er lig matricen selv,

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \quad (8-20)$$

2. Den transponerede til en invers matrix er den samme som den inverse transponerede matrix,

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top. \quad (8-21)$$

3. I matrixligninger kan man gange igennem med den inverse til en regulær matrix. Dette kan gøres enten fra højre eller fra venstre på begge sider af lighedstegnet,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{og} \quad \mathbf{XC} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{DC}^{-1}. \quad (8-22)$$

4. Den inverse til et matrixprodukt af to matricer er lig produktet af de tilsvarende inverse matricer i omvendt rækkefølge,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (8-23)$$

||| **Bevis**

Alle regnereglerne i sætning 8.8 bevises nemt ved at "gøre prøve".

■

Herunder afprøves en af reglerne i et eksempel. Regnereglen i (8-22) er allerede blevet brugt i eksempel 8.6.

||| **Eksempel 8.9 Eftervisning af regneregler ved invers matrix**

Der er givet to kvadratiske matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (8-24)$$

Afprøv den sidste regneregler i sætning 8.8, nemlig at  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

Først bestemmes  $\mathbf{A}^{-1}$  og  $\mathbf{B}^{-1}$  ved hjælp af metode 8.4,

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{E}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]. \quad (8-25)$$

På samme måde med  $\mathbf{B}$ ,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{E}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]. \quad (8-26)$$

Da det er lykkedes, at få enhedsmatricen på venstresiden af stregen i begge tilfælde, har vi nu, at

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-27)$$

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  bestemmes:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \left[ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -9 & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}. \quad (8-28)$$

Højresiden i regnereglen er nu bestemt. På venstresiden skal vi i første omgang finde  $\mathbf{AB}$ ,

$$\mathbf{AB} = \left[ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 26 & 36 \end{bmatrix}. \quad (8-29)$$



Nu bestemmes den inverse til  $\mathbf{AB}$ :

$$[\mathbf{AB} \mid \mathbf{E}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 10 & 14 & 1 & 0 \\ 26 & 36 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right]. \quad (8-30)$$

Vi har altså, at

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}. \quad (8-31)$$

Sammenlignes (8-28) og (8-31), ses det, at der er fuldstændig lighed:  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

### |||| Opgave 8.10 Invers matrix

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8-32)$$

- Bestem  $(\mathbf{BA})^{-1}$ .
- Vis, at  $\mathbf{AB}$  ikke er regulær, og at man derfor ikke kan bestemme  $(\mathbf{AB})^{-1}$ .

### |||| Opgave 8.11 Invers matrix

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8-33)$$

- Udregn  $\mathbf{AC}$ ,  $\mathbf{BD}$  og  $\mathbf{DC}$ .
- Angiv, hvis det er muligt,  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  og  $(\mathbf{AB})^{-1}$ .
- Er det muligt at sige, om  $(\mathbf{AB})^{-1}$  findes efter at have prøvet at bestemme  $\mathbf{A}^{-1}$  og  $\mathbf{B}^{-1}$ ? Hvis ja, hvordan?

## 8.3 Potenser af matricer

Vi har nu set, hvordan den inverse til en regulær matrix bestemmes, og vi siger, at den har potensen  $-1$ . Tilsvarende defineres nu vilkårlige heltallige *potenser af kvadratiske*

matricer.

### ||| Definition 8.12 Potens af matrix

For en vilkårlig kvadratisk matrix  $\mathbf{A}$  defineres følgende naturlige potenser:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}^n = \overbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}^{n \text{ gange}} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (8-34)$$

For en vilkårlig *regulær* kvadratisk matrix  $\mathbf{B}$  defineres yderligere de negative potenser:

$$\mathbf{B}^{-n} = (\mathbf{B}^{-1})^n = \overbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}}^{n \text{ gange}} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (8-35)$$

Som følge af definitionen på potenserne kan nogle regneregler opskrives.

### ||| Sætning 8.13 Regneregler for potenser af matricer

For en vilkårlig kvadratisk matrix  $\mathbf{A}$  og to vilkårlige ikke-negative heltal  $a$  og  $b$  gælder følgende potensregneregler:

$$\mathbf{A}^a \mathbf{A}^b = \mathbf{A}^{a+b} \quad \text{og} \quad (\mathbf{A}^a)^b = \mathbf{A}^{ab}. \quad (8-36)$$

Er  $\mathbf{A}$  regulær, gælder disse regneregler også for negative heltal  $a$  og  $b$ .

Herunder er et eksempel på to (simple) matricer, som har nogle pudsige egenskaber. Egenskaberne er *ikke* typiske for matricer!

### ||| Eksempel 8.14 To pudsige matricer mht. potenser

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}. \quad (8-37)$$

Med hjælp fra både definition 8.12 og sætning 8.13 laves de efterfølgende udregninger. Først bestemmes  $\mathbf{A}^2$ ,

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}. \quad (8-38)$$

Da  $\mathbf{E}$  er regulær, følger det af punkt 2 i hjælpesætning 8.7, at  $\mathbf{A}$  er regulær, og desuden er  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ . Det giver

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}^{-3} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} & \mathbf{A}^{-2} = (\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} & \mathbf{A}^0 = \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 = \mathbf{E} \\ \vdots & \vdots \end{array} \quad (8-39)$$

Alle ulige potenser af  $\mathbf{A}$  giver altså  $\mathbf{A}$ , mens de lige potenser giver enhedsmatricen,

$$\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{E} \text{ og } \mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A} \text{ for } n \in \mathbb{Z}. \quad (8-40)$$



Bemærk, at når  $n$  er et heltal, så opnås netop *kun lige* heltal ved  $2n$  og netop *kun ulige* heltal ved  $2n + 1$ .

$\mathbf{B}^2$  udregnes:

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (8-41)$$

Ifølge samme regneregler er  $\mathbf{B}$  singulær. Man har da, at

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{E}, \mathbf{B}^1 = \mathbf{B}, \mathbf{B}^2 = \mathbf{0} \text{ og } \mathbf{B}^n = \mathbf{0} \text{ for } n \geq 2. \quad (8-42)$$

## 8.4 Opsummering

- Kvadratiske matricer er matricer med lige mange rækker og søjler.
- Enhedsmatricen  $\mathbf{E}$  er en kvadratisk matrix med ettaller i diagonalen og nuller ellers:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (8-43)$$

- Hvis en kvadratisk matrix har fuld rang, kaldes den regulær, ellers kaldes den singular.
- En kvadratisk matrix, som kun har tal forskellige fra nul i diagonalen, kaldes en diagonalmatrix.
- En kvadratisk matrix, som er lig sin egen transponerede, kaldes en symmetrisk matrix.
- Til en regulær matrix  $\mathbf{A}$  findes den inverse, betegnet  $\mathbf{A}^{-1}$ , der opfylder at

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (8-44)$$

Den inverse kan bestemmes ved hjælp af metode 8.4.

- Der findes regneregler med kvadratiske og inverse matricer, se sætning 8.8.
- Potenser af kvadratiske matricer er defineret, se definition 8.12. Dertil findes også nogle regneregler.
- Inverse matricer bruges for eksempel i forbindelse med *basisskifte* og *egenværdiproblemet*. Desuden defineres *determinanten* af en kvadratisk matrix i eNote 9.