eNote 7

Matricer og Matrixalgebra

Denne eNote introducerer matricer og regneoperationer for matricer og udvikler hertil hørende regneregler. Noten kan læses uden andet grundlag end gymnasiet, men det kan være en idé at være bekendt med talrummet $\mathbb{R}^n$, som beskrives i eNote 5.
Opdateret 24.10.21 af Karsten Schmidt

7.1 Matricer

En *matrix* er en form for talskema. Her er et eksempel på en matrix kaldet **M**:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}. \tag{7-1}$$

En matrix karakteriseres ved antallet af *rækker* og *søjler*, og matricen **M** kaldes derfor en (2×3)-matrix. Matricen **M** siges at indeholde $2 \cdot 3 = 6$ *elementer*. Udover rækker, søjler og elementer har matricer en række andre begreber tilknyttet. For at beskrive dem, opstilles en generel matrix, her kaldet **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{7-2}$$

Matricen **A** har således m rækker og n søjler, og man kan ligeledes skrive $\mathbf{A}_{m \times n}$ eller $(m \times n)$*-matricen* **A**. Matricen **A** siges også at være *af typen* $m \times n$.

To $(m \times n)$-matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ kaldes *ens*, hvis de elementvis er ens, og man skriver da $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

En matrix, som kun har én søjle ($n = 1$), kaldes en *søjlematrix*. Tilsvarende kaldes en matrix med kun én række ($m = 1$) en *rækkematrix*.

En matrix med lige mange rækker og søjler ($m = n$) kaldes en *kvadratisk matrix*. Kvadratiske matricer underkastes særlig undersøgelse i eNote 8.

Er alle elementerne i en $(m \times n)$-matrix reelle tal, kaldes matricen en *reel matrix*. Mængden af disse matricer betegnes $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Er alle elementer i en matrix lig med 0, kaldes den *nulmatricen* uanset type og betegnes $\mathbf{0}$ eller evt. $\mathbf{0}_{m \times n}$. Enhver anden matrix kaldes en *egentlig matrix*.

7.2 Matrixsum og produkt af matrix med skalar

Det er muligt at lægge to matricer sammen, hvis de er af samme type. Man lægger da elementerne sammen pladsvis og danner derved en ny matrix af samme type. Ligeså kan man gange en matrix med en skalar (et tal). Det sker ved at gange alle elementerne med skalaren.

|||| Definition 7.1 Matrixsum og produkt med skalar

Givet en skalar $k \in \mathbb{R}$ og to reelle matricer $\mathbf{A}_{m \times n}$ og $\mathbf{B}_{m \times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} . \tag{7-3}$$

Summen af matricerne defineres således:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} . \tag{7-4}$$

Summen er kun defineret, når matricerne er af samme type.

Produktet af matricen $\mathbf{A}$ med skalaren k skrives $k\mathbf{A}$ eller $\mathbf{A}k$ og defineres således:

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} . \tag{7-5}$$

Den *modsatte vektor* $-\mathbf{A}$ til en matrix $\mathbf{A}$ defineres som den matrix, der fremkommer ved, at alle elementerne i $\mathbf{A}$ ganges med -1 . Det ses, at $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 7.2 Simple matrixoperationer

Der er givet to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 9 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{7-6}$$

Matricerne er begge af typen 2×2. Bestem matricerne $\mathbf{C} = 4\mathbf{A}$ og $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Dette kan gøres ved hjælp af definition 7.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = 4\mathbf{A} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 4 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 8 & 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 9 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 25 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-7}$$

I følgende sætning opsummeres de regneregler, der gælder for sum af matricer og produkt med skalar.

|||| Sætning 7.3 Regneregler for matrixsum og produkt med skalar

For vilkårlige matricer $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ i $\mathbb{R}^{m \times n}$ og ligeledes vilkårlige reelle tal k_1 og k_2 gælder følgende regneregler:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ — Addition er kommutativ
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ — Addition er associativ
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ — $\mathbf{0}$ er en neutral matrix for addition i $\mathbb{R}^{m \times n}$
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ — Alle matricer i $\mathbb{R}^{m \times n}$ har en modsat matrix
5. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1 k_2)\mathbf{A}$ — Multiplikation af matrix med skalar er associativ
6. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$ — De distributive regler gælder (6 og 7)
7. $k_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k_1\mathbf{A} + k_1\mathbf{B}$
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ — Skalaren 1 er neutral i produkt med matrix

Regnereglerne i sætning 7.3 kan vises ved hjælp af sædvanlige regneregler for reelle tal. Fremgangsmåden eksemplificeres for to af regnereglernes vedkommende i det følgende eksempel.

|||| Eksempel 7.4 Eftervisning af regneregel 6 og 7 i tilfældet $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Givet er de to matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{7-8}$$

samt konstanterne k_1 og k_2. Vi prøver nu som eksempel at eftervise de distributive regler, som står i sætning 7.3. Først haves

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)\mathbf{A} &= (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{bmatrix} \\ k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{11} & k_1a_{12}+k_2a_{12} \\ k_1a_{21}+k_2a_{21} & k_1a_{22}+k_2a_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-9}$$

Sættes a_{11}, a_{12}, a_{21} og a_{22} uden for parentes i hvert af elementerne i det sidste udtryk, ses det, at $(k_1+k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$. For at sætte a-elementerne uden for parentes for hvert element blev netop den distributive regel for de reelle tal brugt.

Den anden distributive regel efterprøves på de givne matricer og konstanter:

$$\begin{aligned} k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= k_1\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(a_{11}+b_{11}) & k_1(a_{12}+b_{12}) \\ k_1(a_{21}+b_{21}) & k_1(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \\ k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1b_{11} & k_1b_{12} \\ k_1b_{21} & k_1b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1a_{11}+k_1b_{11} & k_1a_{12}+k_1b_{12} \\ k_1a_{21}+k_1b_{21} & k_1a_{22}+k_1b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-10}$$

Sættes k_1 uden for parentes i hvert af elementerne i matricen i det sidste udtryk, ses det, at den anden distributive regel også gælder i dette tilfælde: $k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B}$. Den distributive regel for de reelle tal bruges altså endnu en gang elementvist.

Det bemærkes, at nulmatricen i $\mathbb{R}^{m\times n}$ er den *eneste* matrix i $\mathbb{R}^{m\times n}$, som er neutral for addition, og at $-\mathbf{A}$ er den *eneste* løsning til ligningen $\mathbf{A}+\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

|||| Definition 7.5 Differens mellem matricer

Differensen $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ mellem to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ af samme type indføres ved

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}\,. \tag{7-11}$$

$\mathbf{B}$ trækkes med andre ord fra $\mathbf{A}$ ved at hvert element i $\mathbf{B}$ trækkes fra det tilsvarende element i $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 7.6 Simpel matrixoperation med differens

Med de i eksempel 7.2 givne matricer fås

$$\mathbf{D}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}=2\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 16 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -3\\ -9 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -5\\ 7 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}. \tag{7-12}$$

7.3 Matrix-vektorproduktet og matrix-matrixproduktet

I dette afsnit beskrives produktet af en matrix med en vektor og dernæst produktet af en matrix med en anden matrix.

En vektor $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ kan opskrives på samme måde som en søjlematrix og kaldes i så fald en *søjlevektor*:

$$\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}. \tag{7-13}$$

Man kan på den måde opdele en matrix $\mathbf{A}_{m\times n}$ i dens søjlevektorer. Det skrives på følgende vis:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\\ &=\left[\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7-14}$$

Der er altså n søjlevektorer med hver m elementer.

Læg mærke til, at de firkantede parenteser rundt om søjlevektorerne kan fjernes uden videre! Det kan man i alle de sammenhænge med matricer, hvor dobbelt firkantede parenteser forekommer. Det vil altid være de inderste parenteser, som fjernes. Der er på den måde ingen forskel på de to udtryk — man vil dog altid foretrække det sidste udtryk, fordi det er mest overskueligt.

Vi definerer nu et produkt af en matrix og en vektor, hvor matricen har ligeså mange søjler, som vektoren har elementer:

|||| Definition 7.7 Matrix-vektorprodukt

Lad $\mathbf{A}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{m \times n}$, og lad $\mathbf{v}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$.

Matrix-vektorproduktet af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{v}$ er defineret således:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n \end{bmatrix}. \tag{7-15}$$

Resultatet er en søjlevektor med m elementer. Resultatet er summen af produkterne af matricens k'te søjle og søjlevektorens k'te element for alle $k = 1, 2, \dots, n$.

Der skal være lige mange søjler i matricen, som der er rækker i søjlevektoren, her n.

Læg mærke til rækkefølgen i matrix-vektorproduktet: først matrix, derefter vektor! Det er ikke et vektor-matrixprodukt så at sige. Antallet af søjler og rækker vil ikke passe sammen i den anden konfiguration medmindre matricen er af typen 1×1.

Bemærk i definition 7.7, at $\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ ligeså godt kunne skrives uden firkantede parenteser, $\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$.

|||| Eksempel 7.8 Matrix-vektorprodukt

Der er givet følgende matrix og vektor (søjlevektor):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7-16}$$

Vi danner nu matrix-vektorproduktet af **A** med **v** ved hjælp af definition 7.7:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 4b - c \\ 3d + 4e - f \end{bmatrix}. \tag{7-17}$$

Er **A** givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \tag{7-18}$$

har man da produktet

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1) + 4\cdot 2 - 6 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{7-19}$$

Det ses, at resultatet (i begge tilfælde) er en søjlevektor med lige så mange rækker, som matricen **A** har rækker.

|||| Opgave 7.9 Matrix-vektorprodukt

Dan matrix-vektorproduktet **A** med **x** i ligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, når det er givet, at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{7-20}$$

Er det noget du er stødt på før? Hvor kommer det fra?

Som det er nævnt kan en matrix betragtes som søjlevektorer stillet op efter hinanden. Dette udnyttes i den følgende definition af et matrix-matrixprodukt som en række af matrix-vektorprodukter.

|||| Definition 7.10 Matrix-matrixprodukt

Lad $\mathbf{A}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{m\times n}$, og lad $\mathbf{B}$ være en vilkårlig matrix i $\mathbb{R}^{n\times p}$.

Matrix-matrixproduktet eller bare *matrixproduktet* af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{B}$ er defineret på denne måde:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{b}_p\end{bmatrix}. \tag{7-21}$$

Resultatet er en matrix af typen $m \times p$. Den k'te søjle i resultatmatricen er et matrix-vektorprodukt af den førststående matrix (her $\mathbf{A}$) med den k'te søjlevektor i den sidststående matrix (her $\mathbf{B}$), jf. definition 7.7.

Der skal være lige mange søjler i den førststående matrix, som der er rækker i den sidststående matrix.

|||| Eksempel 7.11 Matrix-matrixprodukt

Der er givet to matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 3}$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}-8 & 3 & 3\\ 2 & 9 & -9\end{bmatrix}. \tag{7-22}$$

Bestem matrix-matrixproduktet af $\mathbf{A}$ med $\mathbf{B}$.

Dette gøres ved hjælp af definition 7.10:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{B} &= \left[\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\ 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 9\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -9\end{bmatrix}\right]\\ &= \begin{bmatrix}4\cdot(-8)+5\cdot 2 & 4\cdot 3+5\cdot 9 & 4\cdot 3+5\cdot(-9)\\ -8+2\cdot 2 & 3+2\cdot 9 & 3+2\cdot(-9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-22 & 57 & -33\\ -4 & 21 & -15\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7-23}$$

Det er *ikke* muligt at danne matrix-matrixproduktet $\mathbf{B}\mathbf{A}$, fordi der ikke er lige så mange søjler i $\mathbf{B}$, som der er rækker i $\mathbf{A}$ ($3 \neq 2$).

|||| Eksempel 7.12 Matrix-matrixprodukt to veje

Givet er de to matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 2}$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7-24}$$

Idet de to matricer er kvadratiske matricer af samme type kan begge matrix-matrixprodukterne **AB** og **BA** beregnes. Bestem dem.

Til det bruges definition 7.10:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 4 + 2\cdot 0 \\ -5\cdot 4 + 1\cdot(-1) & -5\cdot 4 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -21 & -20 \end{bmatrix} \\ \mathbf{BA} &= \left[\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 4\cdot 3 + 4\cdot(-5) & 4\cdot 2 + 4 \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-25}$$

Der gælder altså at $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Faktorernes orden er **ikke** ligegyldig!

Her opsummeres de regneregler, der gælder for matrix-matrixprodukter og matrixsummer. Fordi matrix-vektorproduktet er et særtilfælde af matrix-matrixproduktet, er reglerne også gældende for dem.

|||| Sætning 7.13 Regneregler for matrixsum og -produkt

For vilkårlige matricer **A**, **B** og **C** og ligeledes et vilkårligt reelt tal k gælder følgende regneregler, såfremt de respektive matrix-matrixprodukter kan dannes:

$$\begin{aligned} (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB}) &\quad \text{Produkt med skalar er associativ} \\ \left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \end{aligned}\right\} &\quad \text{De distributive regler gælder} \\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} &\quad \text{Matrix-matrixprodukter er associative} \end{aligned}$$

På samme måde som med regnereglerne i sætning 7.3 efterprøves som eksempel den sidste regneregel i sætning 7.13:

|||| Eksempel 7.14 Er matrixprodukter associative?

Den sidste regneregel i sætning 7.13 efterprøves på matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} . \tag{7-26}$$

Først udregnes **AB** og **BC**:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \\ \mathbf{BC} &= \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -17 & 16 \\ 7 & -21 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{7-27}$$

Dernæst bestemmes $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ og $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17 \\ 7 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -21 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -26 \\ -23 & -36 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -3 & -2 & 13 \\ -9 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -26 \\ -23 & -36 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{7-28}$$

Vi kan se, at $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, og at det derfor er ligemeget, hvilket af matrixprodukterne **AB** og **BC** man udregner først. Dette gælder for alle matricer.

På samme måde, som det er vist i sætning 7.14, kan man eftervise resten af regnereglerne. Ved at bruge mere "'generelle"' matricer kan man også bevise dem på rigtig vis.

|||| Opgave 7.15 Eftervisning af regneregel

Eftervis første regneregel i sætning 7.13 med de to generelle reelle matricer $\mathbf{A}_{2\times 2}$ og $\mathbf{B}_{2\times 2}$ og konstanten k.

7.4 Transponering af matrix

Ved at bytte om på rækker og søjler i en matrix, fremkommer matricens *transponerede matrix*. Fx:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{har den transponerede} \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}. \tag{7-29}$$

$\mathbf{A}^\top$ læses "'**A** *transponeret*"'. Man har da også, at $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$. Her er en nyttig regneregel for transponeret matrix-matrixprodukt.

|||| Sætning 7.16 Transponering af matrix

Lad der være givet to vilkårlige matricer $\mathbf{A}_{m\times n}$ og $\mathbf{B}_{n\times p}$. Man danner de transponerede matricer $\mathbf{A}^\top$ henholdsvis $\mathbf{B}^\top$, ved at bytte om på søjler og rækker i de respektive matricer.

At transponere matrix-matrixproduktet $\mathbf{AB}$ er det samme som at lave matrix-matrixproduktet af $\mathbf{B}^\top$ med $\mathbf{A}^\top$ (altså i modsat rækkefølge):

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top \,. \tag{7-30}$$

I følgende eksempel afprøves sætning 7.16.

|||| Eksempel 7.17 Eftervisning af transponeringsregel

Givet er de to matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{7-31}$$

Man har da, at

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 6\cdot 6 & 6\cdot 3 \\ 7\cdot 9 - 3\cdot 1 - 2\cdot 6 & 7\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 18 \\ 48 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-32}$$

Vi prøver nu at lave matrix-matrixproduktet $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$, og vi har, at

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{7-33}$$

så

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top &= \left[\begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 6 \cdot 6 & 9 \cdot 7 - 1 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 48 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7-34}$$

De to resultater ser ens ud

$$\begin{bmatrix} -35 & 18 \\ 48 & 13 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -35 & 48 \\ 18 & 13 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top, \tag{7-35}$$

hvilket stemmer med sætning 7.16.

|||| Opgave 7.18 Matrixprodukt og transponering

Givet er matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7-36}$$

Udregn følgende, hvis det er muligt:

a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$	b) $2\mathbf{A}^\top - 3\mathbf{B}^\top$	c) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^\top$	d) $\mathbf{AB}$
e) $\mathbf{AB}^\top$	f) $\mathbf{BA}^\top$	g) $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}$	h) $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$