eNote 5

Talrummene $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$

Denne eNote handler om talrummene $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$, der er afgørende byggesten i Lineær Algebra. Opdateret 24.10.21 af Karsten Schmidt

5.1 Talrum

Bemærkning 5.1 Fællesbetegnelsen $\mathbb{L}$

Definitioner og regler i denne eNote gælder både for de reelle tal $\mathbb{R}$ og de komplekse tal $\mathbb{C}$. Mængden af reelle tal og mængden af komplekse tal er eksempler på *tallegemer*. Tallegemer har fælles regneregler, hvad angår de elementære regneoperationer. Når vi i det følgende benytter symbolet $\mathbb{L}$, betyder det, at det, der beskrives, gælder for mængden af både komplekse såvel som reelle tal.

$\mathbb{R}^n$ er symbol for mængden af alle ordnede talsæt, som indeholder n reelle elementer. Fx er

$$(1,4,5) \text{ og } (1,5,4)$$

to forskellige talsæt, som tilhører $\mathbb{R}^3$. Tilsvarende er $\mathbb{C}^n$ symbol for mængden af alle ordnede talsæt, som indeholder n komplekse elementer. Komplekse tal behandles i eNote 1. Fx er

$$(1+2i, 0, 3i, 1, 1) \text{ og } (1,2,3,4,5)$$

to forskellige talsæt, som tilhører $\mathbb{C}^5$. Mere formelt kan vi opskrive $\mathbb{L}^n$ på mængdeform således:

$$\mathbb{L}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{L}\}\,. \tag{5-1}$$

Vi indfører addition af elementer i $\mathbb{L}^n$ og multiplikation af et element i $\mathbb{L}^n$ med et element i $\mathbb{L}$ (en skalar) ved følgende definition:

|||| Definition 5.2

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ være elementer i $\mathbb{L}^n$, og lad k være et tal i $\mathbb{L}$ (en skalar). *Summen* af talsættene defineres ved

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n), \tag{5-2}$$

og *produktet* af $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ med k defineres ved

$$k \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot k = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, \ldots, k \cdot a_n\,). \tag{5-3}$$

$\mathbb{R}^n$ udstyret med regneoperationerne (5-2) og (5-3) kaldes det n-dimensionale *reelle talrum*. Tilsvarende kaldes $\mathbb{C}^n$ udstyret med regneoperationerne (5-2) og (5-3) det n-dimensionale *komplekse talrum*.

|||| Eksempel 5.3 addition

Et eksempel på addition af to talsæt i $\mathbb{R}^4$ er

$$(1, 2, 3, 4) + (2, 1, -2, -5) = (3, 3, 1, -1).$$

|||| Eksempel 5.4 multiplikation

Et eksempel på multiplikation af et talsæt i $\mathbb{R}^3$ med en skalar er

$$5 \cdot (2, 4, 5) = (10, 20, 25)\,.$$

Et eksempel på multiplikation af et talsæt i $\mathbb{C}^2$ med en skalar er

$$i \cdot (2 + i, 4) = (-1 + 2i, 4\,i)\,.$$

Som kort notation for talsæt vil vi bruge små **fede** bogstaver. Vi kan for eksempel skrive

$$\mathbf{a} = (3, 2, 1) \text{ eller } \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \,.$$

For talsættet $(0, 0, \ldots, 0)$, som kaldes *nulelementet* i $\mathbb{L}^n$, benyttes skrivemåden

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \,.$$

Når man skal foretage mere sammensatte regneopgaver i talrummene, får man brug for de følgende regneregler.

|||| Sætning 5.5 Regneregler i $\mathbb{L}^n$

Med de i definition 5.2 indførte regneoperationer opfylder talrummene $\mathbb{L}^n$ for enhver værdi af n de følgende otte regneregler:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (additionen er kommutativ)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (additionen er associativ)
3. For ethvert $\mathbf{a}$ gælder, at $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (dvs. $\mathbf{0}$ er neutralt mht. addition)
4. Til ethvert $\mathbf{a}$ findes et *modsat element* $-\mathbf{a}$ således, at $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$ (produkt med skalarer er associativt)
6. $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$ (distributiv regel)
7. $k_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k_1\mathbf{a} + k_1\mathbf{b}$ (distributiv regel)
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (tallet 1 er neutralt mht. multiplikation)

|||| Bevis

Vedrørende regel 4: Givet to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Der gælder da

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow b_1 = -a_1, \ldots, b_n = -a_n \,.$$

Heraf ses, at $\mathbf{a}$ har en modsat vektor $-\mathbf{a}$ givet ved $-\mathbf{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$. Det fremgår endda, at $\mathbf{a}$ *kun* har denne modsatte vektor.

De øvrige regneregler bevises ved simpel udregning af venstreside og højreside og efterfølgende sammenligning.

■

Af beviset for regel 4 i sætning 5.5 fremgår, at der for et vilkårligt talsæt $\mathbf{a}$ gælder, at $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$.

|||| Opgave 5.6

Gennemfør et formelt bevis for regel 2 og regel 5 i sætning 5.5.

|||| Definition 5.7 Subtraktion

Givet $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^n$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{L}^n$. Differensen $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ indføres ved

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\,. \tag{5-4}$$

|||| Eksempel 5.8 Subtraktion

$(1 + 2i, 1) - (i, 2) = (1 + 2i, 1) + (-(i, 2)) = (1 + 2i, 1) + (-i, -2) = (1 + i, -1)$.

|||| Opgave 5.9 Nulreglen

Vis, at den følgende variant af *nulreglen* gælder:

$$k\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow k = 0 \text{ eller } \mathbf{a} = \mathbf{0}\,. \tag{5-5}$$

|||| Bemærkning 5.10 Talsæt som vektorer

Ofte skriver man et talsæt som en *søjlevektor*. Vi har dermed to ækvivalente skrivemåder, her vist med et eksempel fra $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4) \;\text{ og }\; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hvis man i en bestemt sammenhæng har brug for at opfatte talsættet som en rækkevektor, udfører man en såkaldt *transponering*, som ændrer en søjlevektor til en rækkevektor (og omvendt). Transponering har symbolet $^\top$:

$$\mathbf{v}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$