eNote 3

Elementære funktioner

I denne eNote vil vi dels repetere nogle af de basale egenskaber for et udvalg af de (fra gymnasiet) velkendte funktioner $f(x)$ af én reel variabel x, og dels introducere enkelte nye funktioner, som typisk optræder i mangfoldige sammenhænge. De grundlæggende spørgsmål vedrørende enhver funktion drejer sig typisk om følgende: Hvordan og for hvilke x er funktionen defineret*? Hvilke værdier af $f(x)$ får vi, når vi bruger funktionen på elementerne x i definitionsmængden? Er funktionen* kontinuert*? Hvad er* differentialkvotienten $f'(x)$ *af funktionen – hvis den eksisterer? Som noget nyt vil vi indføre en meget stor* klasse *af funktioner, epsilon-funktionerne, som betegnes med fællesbetegnelsen $\varepsilon(x)$, og som vi gennemgående vil benytte til at beskrive kontinuitet og differentiabilitet – også af funktioner af flere variable, som vil blive indført og analyseret i de efterfølgende eNoter.*
Opdateret 24.10.21 af Karsten Schmidt

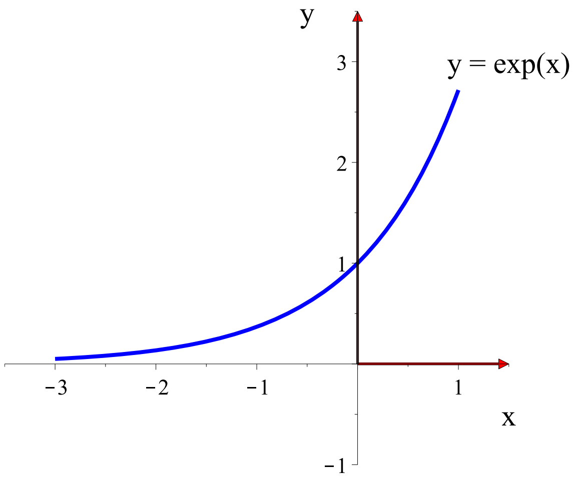
3.1 Definitionsmængde og værdimængde

Ved beskrivelsen af en reel funktion $f(x)$ anføres dels de reelle tal x, hvor funktionen er defineret, og dels de værdier, som kan fås ved at benytte funktionen på definitionsmængden. *Definitionsmængden* kalder vi $\mathcal{D}m(f)$ og *værdimængden* kalder vi $\mathcal{V}m(f)$.

|||| Eksempel 3.1 Nogle definitionsmængder og værdimængder

Her er definitonsmængder og tilhørende værdimængder for nogle velkendte funktioner.

$$
\begin{array}{llll}
f_1(x) = \exp(x) & , \ \mathcal{D}m(f_1) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_1) =]0,\infty[\\
f_2(x) = \ln(x) & , \ \mathcal{D}m(f_2) =]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_2) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[\\
f_3(x) = \sqrt{x} & , \ \mathcal{D}m(f_3) = \ [0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_3) = \ [0,\infty[\\
f_4(x) = x^2 & , \ \mathcal{D}m(f_4) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_4) = \ [0,\infty[\\
f_5(x) = x^7 + 8x^3 + x - 1 & , \ \mathcal{D}m(f_5) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_5) = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[\\
f_6(x) = \exp(\ln(x)) & , \ \mathcal{D}m(f_6) =]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_6) =]0,\infty[\\
f_7(x) = \sin(1/x) & , \ \mathcal{D}m(f_7) =]-\infty,0[\cup]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_7) = [-1,1] \\
f_8(x) = |x|/x & , \ \mathcal{D}m(f_8) =]-\infty,0[\cup]0,\infty[& , \ \mathcal{V}m(f_8) = \{-1\}\cup\{1\}
\end{array}
\tag{3-1}
$$



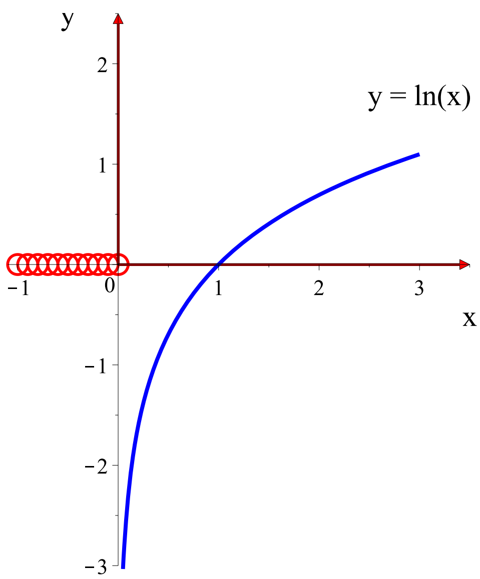


Figure 3.1: Den velkendte eksponentialfunktion $e^x = \exp(x)$ og den naturlige logaritmefunktion $\ln(x)$. De røde cirkler på den negative x-akse og i 0 indikerer, at logaritmefunktionen ikke er defineret i $]-\infty, 0]$.

Funktionen $f_8(x)$ i eksempel 3.1 er defineret ud fra $|x|$, som betegner den numeriske værdi af x, dvs.

$$|x| = \begin{cases} x > 0\,, & \text{for} \quad x > 0 \\ 0\,, & \text{for} \quad x = 0 \\ -x > 0\,, & \text{for} \quad x < 0 \quad . \end{cases} \tag{3-2}$$

Heraf følger definitionsmængde og værdimængde for $f_8(x)$ direkte.

|||| Eksempel 3.2 Tangens

Funktionen

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{3-3}$$

har definitionsmængden $\mathcal{D}m(f) = \mathbb{R} \setminus A$, hvor A betegner de reelle tal x, hvor nævneren $\cos(x)$ er 0, dvs.

$$\mathcal{D}m(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + p \cdot \pi\,, \text{hvor } p \text{ er et helt tal}\}\ . \tag{3-4}$$

Værdimængden $\mathcal{V}m(f)$ er alle de reelle tal, se figur 3.2.

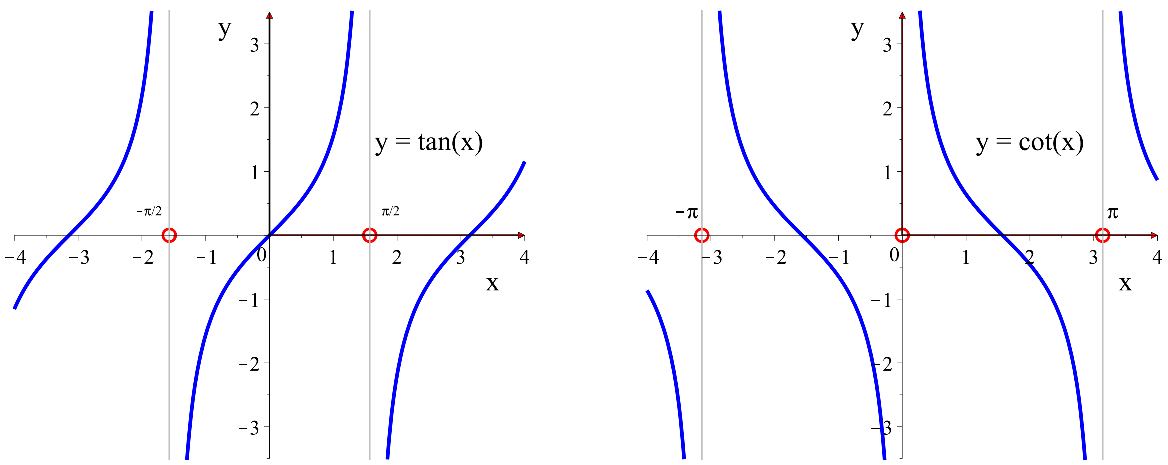


Figure 3.2: Graferne for funktionerne $\tan(x)$ og $\cot(x)$.

|||| Opgave 3.3

Lad $g(x)$ betegne den reciprokke funktion til funktionen $\tan(x)$:

$$g(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{3-5}$$

Se figur 3.2. Bestem definitionsmængden for $g(x)$, og skriv den på samme måde som for $\tan(x)$ ovenfor.

3.1.1 Udvidelser af definitionsmængden til hele $\mathbb{R}$

En funktion $f(x)$, som ikke er defineret i alle reelle tal, kan kan let *udvides* til en funktion $\widehat{f}(x)$, som har $\mathcal{D}m(\widehat{f}) = \mathbb{R}$. Det kan for eksempel gøres ved hjælp af en krøllet parentes som i følgende definition.

|||| Definition 3.4 0-udvidelsen

Givet en funktion $f(x)$ med $\mathcal{D}m(f) \neq \mathbb{R}$. Så definerer vi 0-*udvidelsen* af $f(x)$ ved

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(f) \\ 0\,, & \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}m(f) \end{cases} \quad . \tag{3-6}$$

Det er klart, at afhængig af anvendelsen kan man plombere og udvide definitionsmængden for $f(x)$ på mange andre måder end ved at vælge konstanten 0 som værdi for den udvidede funktion i de punkter, hvor den oprindelige funktion ikke er defineret.

Værdimængden $\mathcal{V}m(\widehat{f})$ for den 0-udvidede funktion er naturligvis den oprindelige værdimængde for $f(x)$ forenet med værdien 0, dvs. $\mathcal{V}m(\widehat{f}) = \mathcal{V}m(f) \cup \{0\}$.

Vi vil herefter typisk — medmindre andet nævnes helt tydeligt — antage, at de funktioner, vi betragter, er definerede i hele $\mathbb{R}$ (eventuelt ved hjælp af en udvidelseskonstruktion) som ovenfor.

3.2 Epsilon-funktioner

Vi indfører en særlig klasse af funktioner, som vi vil benytte til at definere det vigtige begreb *kontinuitet* for funktioner.

|||| Definition 3.5 Epsilon-funktioner

Enhver funktion $\varepsilon(x)$, som er defineret i et åbent interval, der indeholder 0, og som antager værdien $\varepsilon(0) = 0$ i $x = 0$ og derudover går imod 0, når x går imod 0, kaldes en *epsilon-funktion* af x. Epsilon-funktioner er altså karakteriserede ved egenskaberne

$$\varepsilon(0) = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{3-7}$$

Den sidste betingelse er ækvivalent med, at den numeriske værdi af $\varepsilon(x)$ kan gøres så lille som ønsket ved blot at vælge den numeriske værdi af x tilstrækkelig lille. Helt præcis betyder betingelsen: For ethvert helt tal $k > 0$ findes der et helt tal $K > 0$ sådan, at $|\varepsilon(x)| < 1/k$ for alle x med $|x| < 1/K$.

Mængden af epsilon-funktioner er meget stor, som næste eksempel viser.

|||| Eksempel 3.6 Epsilon-funktioner

Her er nogle simple eksempler på epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= x \\ \varepsilon_2(x) &= |x| \\ \varepsilon_3(x) &= \ln(1+x) \\ \varepsilon_4(x) &= \sin(x) \quad . \end{aligned} \tag{3-8}$$

Egenskaben "‘at være en epsilon-funktion"’ er ret stabil: Produktet af en epsilon-funktion med en vilkårlig anden funktion, der blot er begrænset, er også en epsilon-funktion. Summen og produktet af to epsilon-funktioner er igen epsilon-funktioner. Den numeriske værdi af en epsilon-funktion er en epsilon-funktion.

Funktioner, der er 0 andre steder end i $x = 0$, kan også give anledning til epsilon-funktioner:

Hvis en funktion $g(x)$ har egenskaberne $g(x_0) = 0$ og $g(x) \to 0$ for $x \to x_0$, så er $g(x)$ en epsilon-funktion af $x - x_0$, dvs. vi kan skrive $g(x) = \varepsilon_g(x - x_0)$.

|||| Opgave 3.7

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f_8}(x)$ af funktionen $f_8(x) = |x|/x$ *ikke* er en epsilon-funktion.

Vink: Hvis vi vælger $k = 10$, så findes der helt klart *ikke* nogen værdi af K sådan, at

$$|f_8(x)| = |\,|x|/x\,| = 1 < \frac{1}{10} \quad , \quad \text{for alle } x \text{ med} \quad |x| < \frac{1}{K} \quad . \tag{3-9}$$

Tegn grafen for $\widehat{f_8}(x)$. Den kan ikke tegnes uden at "‘løfte blyanten fra papiret"’!

|||| Opgave 3.8

Vis, at 0-udvidelsen af funktionen $f(x) = \sin(1/x)$ *ikke* er en epsilon-funktion.

3.3 Kontinuerte funktioner

Vi kan nu formulere *kontinuitetsbegrebet* ved hjælp af epsilon-funktioner.

|||| Definition 3.9 Kontinuitet

En funktion $f(x)$ er kontinuert i x_0, hvis der eksisterer en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0)$ således, at følgende gælder i et åbent interval, der indeholder x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \ . \tag{3-10}$$

Hvis $f(x)$ er kontinuert i alle x_0 i et givet åbent interval i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi, at $f(x)$ er kontinuert i intervallet.

Læg mærke til, at selvom det er klart, hvad epsilon-funktionen helt præcist er i definition 3.9, nemlig $f(x) - f(x_0)$, så er den eneste egenskab, vi er interesserede i, følgende: $\varepsilon_f(x - x_0) \to 0$ for $x \to x_0$ sådan, at $f(x) \to f(x_0)$ for $x \to x_0$, altså præcis som vi kender kontinuitets-begrebet fra gymnasiet!

|||| Opgave 3.10

Alle epsilon-funktioner er herefter per definition kontinuerte i $x_0 = 0$ (med værdien 0 i $x_0 = 0$). Konstruér en epsilon-funktion, som *ikke* er kontinuert i nogen som helst af punkterne $x_0 = 1/n$, hvor $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$.

Selvom epsilonfunktionsbegrebet er helt fundamentalt for definitionen af kontinuitet (og, som vi skal se nedenfor, for definitionen af differentiabilitet), så behøver epsilonfunktionerne altså ikke selv at være kontinuerte andre steder end netop i $x_0 = 0$.

|||| Opgave 3.11

Vis, at 0-udvidelsen $\widehat{f}(x)$ af funktionen $f(x) = |x - 7|/(x - 7)$ *ikke* er kontinuert i $\mathbb{R}$.

3.4 Differentiable funktioner

|||| Definition 3.12 Differentiabilitet

En funktion $f(x)$ er differentiabel i $x_0 \in \mathcal{D}m(f)$, hvis der findes en konstant a og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x-x_0)$ sådan, at

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{3-11}$$

Tallet a kaldes $f'(x_0)$, og det er veldefineret i den forstand, at hvis $f(x)$ i det hele taget *kan* fremstilles på ovenstående form (altså hvis $f(x)$ er differentiabel i x_0), så er der én og kun én værdi for a, som gør formlen rigtig. Med denne definition af *differentialkvotienten* $f'(x_0)$ af $f(x)$ i x_0 har vi altså

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{3-12}$$

Hvis $f(x)$ er differentiabel i alle x_0 i et givet åbent interval i $\mathcal{D}m(f)$, så siger vi naturligvis, at $f(x)$ er differentiabel i intervallet. Vi skriver ofte differentialkvotienten af $f(x)$ i x på følgende alternative måde:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad . \tag{3-13}$$

|||| Forklaring 3.13 Differentialkvotienten er entydig

Vi vil vise, at der kun findes én værdi af a, som kan opfylde (3-11). Antag nemlig omvendt, at der er to forskellige værdier a_1 og a_2, som opfylder ligningen med muligvis to forskellige epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_1(x - x_0) \\ f(x) &= f(x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_2(x - x_0) \quad . \end{aligned} \tag{3-14}$$

Ved at trække nederste ligning i (3-14) fra den øverste får vi så

$$0 = 0 + (a_1 - a_2) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot (\varepsilon_1(x - x_0) - \varepsilon_2(x - x_0)) \tag{3-15}$$

således, at

$$a_1 - a_2 = \varepsilon_2(x - x_0) - \varepsilon_1(x - x_0) \tag{3-16}$$

for alle $x \neq x_0$. Det kan klart ikke være rigtigt; højresiden går jo imod 0, når x går imod x_0! Antagelsen ovenfor, altså at $a_1 \neq a_2$, er derfor forkert. De to konstanter a_1 og a_2 må være ens, og det var det, vi skulle indse.

Ovenstående definition er helt ækvivalent med den, vi kender fra gymnasiet. Hvis vi nemlig først trækker $f(x_0)$ fra begge sider af lighedstegnet i (3-12) og dernæst dividerer igennem med $(x - x_0)$, får vi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \to f'(x_0) \quad \text{for} \quad x \to x_0 \quad , \tag{3-17}$$

altså den velkendte grænseværdi for *kvotienten* mellem funktionstilvæksten $f(x) - f(x_0)$ og x-tilvæksten $x - x_0$. Grunden til, at vi ikke bruger denne kendte definition af $f'(x_0)$, er den simple, at for funktioner af flere variable giver kvotient-brøken ikke mening — men mere om det i en senere eNote.

|||| Sætning 3.14 Differentiabel medfører kontinuert

Hvis en funktion $f(x)$ er differentiabel i x_0, så er $f(x)$ også kontinuert i x_0.

|||| Bevis

Vi har, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \left[f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \right] , \end{aligned} \tag{3-18}$$

og da hele den kantede parentes på højre side er en epsilon-funktion af $(x - x_0)$, så er $f(x)$ kontinuert i x_0.

■

Men det omvendte gælder ikke nødvendigvis, som følgende eksempel viser.

|||| Eksempel 3.15 Kontinuert men ikke differentiabel

Funktionen $f(x) = |x|$ er kontinuert men ikke differentiabel i $x_0 = 0$. Funktionen er selv en epsilon-funktion, og $f(x)$ er derfor kontinuert i 0. Men antag nu, at der findes en konstant a og en epsilon-funktion $\varepsilon_f(x - x_0)$ sådan, at

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{3-19}$$

Så skulle der gælde, at

$$|x| = 0 + a \cdot x + x \cdot \varepsilon_f(x) \tag{3-20}$$

og dermed for alle $x \neq 0$ at

$$\frac{|x|}{x} = a + \varepsilon_f(x) \quad . \tag{3-21}$$

Det kan ikke lade sig gøre, for så skulle a være både -1 og 1 og det er umuligt! Derfor er ovenstående antagelse om, at der skulle findes en sådan konstant a, altså forkert. $f(x)$ er derfor ikke differentiabel.

|||| Definition 3.16 Approksimerende førstegradspolynomium

Det approksimerende førstegradspolynomium for $f(x)$ med udviklingspunkt x_0 defineres ved

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad . \tag{3-22}$$

Bemærk, at $P_{1,x_0}(x)$ virkelig *er* et førstegradspolynomium i x. Grafen for funktionen $P_{1,x_0}(x)$ er *tangenten til grafen* for $f(x)$ igennem punktet $(x_0, f(x_0))$, se figur 3.3. Ligningen for tangenten er $y = P_{1,x_0}(x)$, alts $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Hældningskoefficienten for tangenten er klart $\alpha = f'(x_0)$, og tangenten skærer y-aksen i punktet $(0, f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0))$. Vi skal senere finde ud af, hvordan vi kan approksimere med polynomier af højere grad n, altså polynomier der så betegnes $P_{n,x_0}(x)$.

3.4.1 Differentiation af et produkt

|||| Sætning 3.17 Differentiation af $f(x) \cdot g(x)$

Et produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ af to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiabel og differentieres på følgende velkendte måde:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad . \tag{3-23}$$

Selv om denne formel formentlig er ganske velkendt fra gymnasiet, vil vi kort skitsere

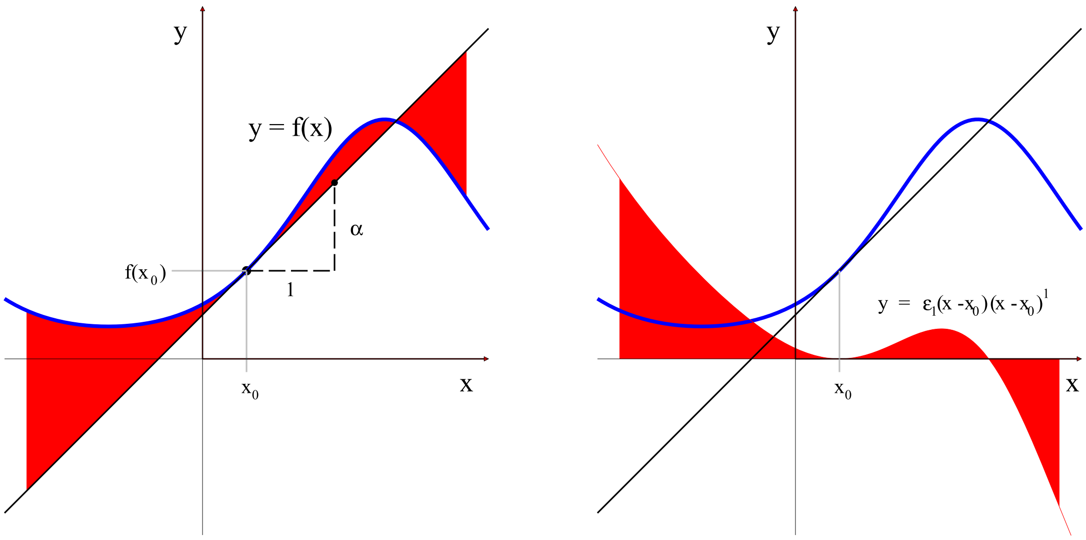


Figure 3.3: Konstruktion af tangenten $y = P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)$ med hældningskoefficienten $\alpha = f'(x_0)$ for funktionen $f(x)$. Til højre ses forskellen mellem funktionsværdien $f(x)$ og "'tangentværdien"' $P_{1,x_0}(x)$.

et bevis for den igen for at illustrere brugen af epsilon-funktioner.

|||| Bevis

Da $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i x_0, har vi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_g(x - x_0) \end{aligned} \tag{3-24}$$

sådan, at produktet af de to højresider bliver

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_h(x - x_0) \, , \end{aligned} \tag{3-25}$$

hvor vi har benyttet $(x - x_0)\varepsilon_h(x - x_0)$ som kort skrivemåde for den resterende del af produktsummen. Enhver af addenderne i denne resterende del indholder faktoren $(x - x_0)^2$ eller et produkt af $(x - x_0)$ med en epsilon-funktion og *kan* derfor netop skrives på den angivne form. Men så følger produktformlen ved direkte at aflæse faktoren foran $(x - x_0)$ i (3-25):

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad . \tag{3-26}$$

■

3.4.2 Differentiation af en brøk

Følgende differentiationsregel er ligeledes velkendt fra gymnasiet:

|||| Sætning 3.18 Differentiation af $f(x)/g(x)$

En brøk $h(x) = f(x)/g(x)$ mellem to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiabel overalt, hvor $g(x) \neq 0$, og differentieres på følgende velkendte måde:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad . \tag{3-27}$$

|||| Opgave 3.19

Benyt et epsilonfunktions-argument på samme måde som i differentiationsreglen for et produkt til at vise sætning 3.18.

3.4.3 Differentiation af sammensatte funktioner

|||| Sætning 3.20 Kædereglen for sammensatte funktioner

En funktion $h(x) = f(g(x))$, der er sammensat af de to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$, er selv differentiabel i ethvert x_0 med differerentialkvotienten

$$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \tag{3-28}$$

|||| Bevis

Vi benytter, at de to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable. Specielt er $g(x)$ differentiabel i x_0,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\cdot \varepsilon_g(x - x_0) \quad , \tag{3-29}$$

og funktionen $f(u)$ er differentiabel i $u_0 = g(x_0)$,

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + (u - u_0) \cdot \varepsilon_f(u - u_0) \quad . \tag{3-30}$$

Heraf fås så, når vi sætter $u = g(x)$ og $u_0 = g(x_0)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0)) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0)) \\ &= h(x_0) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_g(x - x_0)) \\ &\qquad + (g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_g(x - x_0)) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0)) \\ &= h(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon_h(x - x_0) \quad , \end{aligned} \tag{3-31}$$

hvoraf det direkte aflæses, at $h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ — fordi dette netop er den entydige koefficient på $(x - x_0)$ i ovenstående udtryk.

■

|||| Opgave 3.21

Vi har i ovenstående — sidst i (3-31) — benyttet, at

$$f'(g(x_0)) \cdot \varepsilon_g(x - x_0) + (g'(x_0) + \varepsilon_g(x - x_0)) \cdot \varepsilon_f(g(x) - g(x_0)) \tag{3-32}$$

er en epsilon-funktion, som vi derfor kaldte $\varepsilon_h(x - x_0)$. Overvej, hvorfor dette er helt OK.

|||| Opgave 3.22

Find differentialkvotienterne af følgende funktioner for enhver x-værdi i de respektive definitionsmængder:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x^2 + 1) \cdot \sin(x) \\ f_2(x) &= \sin(x)/(x^2 + 1) \\ f_3(x) &= \sin(x^2 + 1) \quad . \end{aligned} \tag{3-33}$$

3.5 Omvendte funktioner

Exponentialfunktionen $\exp(x)$ og logaritmefunktionen $\ln(x)$ er hinandens ***omvendte funktioner*** – der gælder som bekendt:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(\ln) =]0,\infty[= \mathcal{V}m(\exp) \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}m(\exp) =]-\infty,\infty[= \mathcal{V}m(\ln) \quad . \end{aligned} \tag{3-34}$$

Læg mærke til, at selv om $\exp(x)$ er defineret for alle x, så er den omvendte funktion $\ln(x)$ kun defineret for $x > 0$ – og omvendt (!)

Funktionen $f(x) = x^2$ har en omvendt funktion i sine respektive monotoni-intervaller, dvs. der hvor $f(x)$ er voksende henholdsvis aftagende: Den omvendte funktion i det interval, $[0,\infty[$, hvor $f(x)$ er voksende er den velkendte funktion $g(x) = \sqrt{x}$. Funktionen $f(x)$ afbilder altså intervallet $A = [0,\infty[$ en-entydigt på intervallet $B = [0,\infty[$, og den omvendte funktion $g(x)$ afbilder intervallet B en-entydigt på intervallet A således at:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{for} \quad x \in B = [0,\infty[\\ g(f(x)) &= \sqrt{x^2} = x \quad \text{for} \quad x \in A = [0,\infty[\quad . \end{aligned} \tag{3-35}$$

Den omvendte funktion til $f(x)$ i det interval, $]-\infty,0]$, hvor $f(x)$ er aftagende er funktionen $h(x) = -\sqrt{x}$, som ikke er defineret på det *samme* interval som $f(x)$. Funktionen $f(x)$ afbilder intervallet $C =]-\infty,0]$ en-entydigt på intervallet $D = [0,\infty[$, og den omvendte funktion $h(x)$ afbilder intervallet D en-entydigt på intervallet C således at:

$$\begin{aligned} f(h(x)) &= (-\sqrt{x})^2 = x \quad \text{for} \quad x \in D = [0,\infty[\\ h(f(x)) &= -\sqrt{x^2} = x \quad \text{for} \quad x \in C =]-\infty,0] \quad . \end{aligned} \tag{3-36}$$

Hvis $f(x)$ ikke er monoton på et interval, så betyder det essentielt, at vi kan opnå *samme funktions-værdi* $f(x)$ for flere forskellige x-værdier – på samme måde som $x^2 = 1$ både for $x = 1$ og for $x = -1$, og så er funktionen ikke en-entydig på intervallet. Funktionerne $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er kun monotone på bestemte del-intervaller på x-aksen, se figur 3.7. Hvis vi ønsker at definere en omvendt funktion til de funktioner må vi altså vælge et sådant interval med omhu, se afsnit 3.8 og figur 3.8.

|||| Definition 3.23 Notation for omvendte funktioner

Den omvendte funktion til en given funktion $f(x)$ vil vi betegne med $f^{\circ -1}(x)$. Den omvendte funktion er generelt defineret ved følgende egenskaber på passende valgte intervaller A og B som er indeholdt i henholdsvis $\mathcal{D}m(f)$ og $\mathcal{D}m(f^{\circ -1})$

$$\begin{aligned} f^{\circ -1}(f(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in A \subset \mathcal{D}m(f) \\ f(f^{\circ -1}(x)) &= x \quad \text{for} \quad x \in B \subset \mathcal{D}m(f^{\circ -1}) \quad . \end{aligned} \tag{3-37}$$

Vi bruger betegnelsen $f^{\circ -1}(x)$ for ikke at forveksle med $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$. Grafen for den omvendte funktion $g(x) = f^{\circ -1}(x)$ til en funktion $f(x)$ kan fås ved at ***spejle grafen*** for $f(x)$ i diagonal-linjen i (x, y)-koordinatsystemet – dvs. linjen med ligningen $y = x$ – se figur 3.4.

3.5.1 Differentiation af omvendte funktioner

|||| Sætning 3.24 Differentiation af omvendt funktion

Hvis en differentiabel funktion $f(x)$ har den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ og hvis $f'(f^{\circ -1}(x_0)) \neq 0$, så er den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ selv differentiabel i x_0:

$$(f^{\circ -1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{\circ -1}(x_0))} \tag{3-38}$$

|||| Bevis

Pr. definition af omvendt funktion gælder, at

$$h(x) = f(f^{\circ -1}(x)) = x \quad , \tag{3-39}$$

så $h'(x_0) = 1$, men vi har så også fra kædereglen i (3-28):

$$h'(x_0) = f'(f^{\circ -1}(x_0)) \cdot (f^{\circ -1})'(x_0) = 1 \quad , \tag{3-40}$$

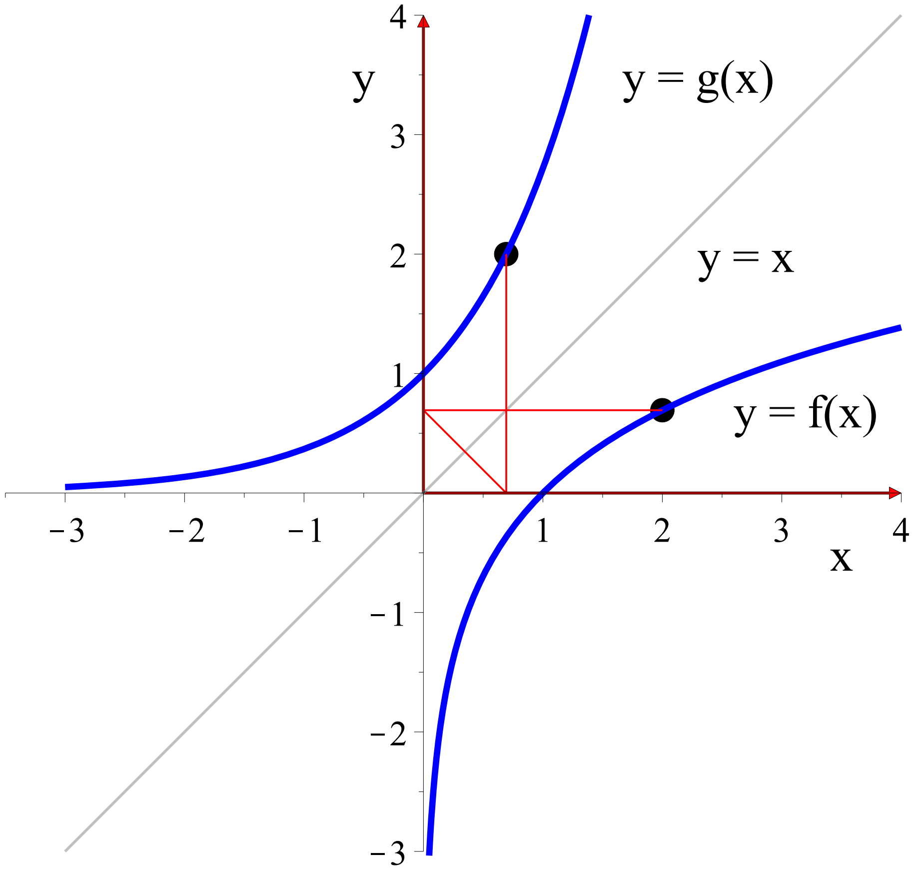


Figure 3.4: Grafen for en funktion $f(x)$ og grafen for dens omvendte funktion $g(x)$. Der gælder $g(x) = f^{\circ -1}(x)$ og $f(x) = g^{\circ -1}(x)$, men de har hver deres egne definitionsintervaller.

hvoraf vi får resultatet ved at dividere med $f'(f^{\circ -1}(x_0))$.

■

3.6 Hyperbolske funktioner

|||| Definition 3.25 Hyperbolsk cosinus og hyperbolsk sinus

Vi vil definere to nye funktioner $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ som de entydigt bestemte løsninger til følgende differentialligningssystem med begyndelsesbetingelser. De to funktioner benævnes henholdsvis ***hyperbolsk cosinus*** og ***hyperbolsk sinus***:

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \quad , \quad \cosh(0) = 1 \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \quad , \quad \sinh(0) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3-41}$$

Betegnelserne $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ ligner $\cos(x)$ og $\sin(x)$, men funktionerne er meget forskellige, som vi skal se nedenfor.

Der er dog også fundamentale strukturelle ligheder mellem de to par af funktioner og det er dem der motiverer betegnelserne. I differentialligningssystemet for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ optræder kun et enkelt minus-tegn som eneste forskel i forhold til (3-41):

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\sin(x) \quad , \quad \cos(0) = 1 \\ \sin'(x) &= \cos(x) \quad , \quad \sin(0) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3-42}$$

Desuden gælder (igen med et helt afgørende minustegn som eneste forskel) følgende simple analogi til den velkendte og ofte brugte relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

|||| Sætning 3.26 Fundamentale relation for $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad . \tag{3-43}$$

|||| Bevis

Differentier med hensyn til x på begge sider af ligningen (3-43) og konkludér, at $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ er en konstant. Brug til sidst begyndelsesbetingelserne.

■

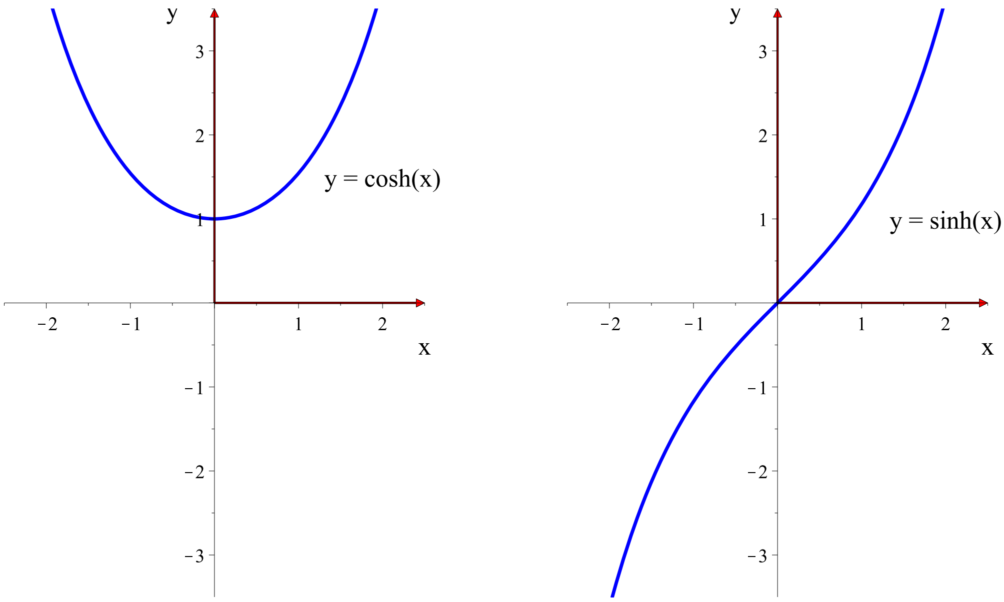


Figure 3.5: Hyperbolsk cosinus, $\cosh(x)$, og hyperbolsk sinus, $\sinh(x)$.

|||| Opgave 3.27

Vis direkte ud fra differentialligningssystemet (3-41) at de to "nye" funktioner faktisk ikke er så nye endda:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathcal{D}m(\cosh) = \mathbb{R} \quad , \qquad \mathcal{V}m(\cosh) = \ [1, \infty[\\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathcal{D}m(\sinh) = \mathbb{R} \quad , \qquad \mathcal{V}m(\sinh) =]-\infty, \infty[\end{aligned} \tag{3-44}$$

|||| Opgave 3.28

Vis *direkte* ud fra de fundne udtryk i opgave 3.27, at

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad . \tag{3-45}$$

|||| Opgave 3.29

Grafen for funktionen $f(x) = \cosh(x)$ ligner meget en parabel, nemlig grafen for funktionen $g(x) = 1 + (x^2/2)$ når vi plotter begge funktionerne i et passende lille interval omkring $x_0 = 0$. Prøv det! Hvis vi derimod plotter begge graferne over et meget stort x-interval, vil vi opdage, at de to funktioner har meget forskellige grafiske opførsler. Prøv det, dvs. prøv at plotte begge funktioner over intervallet $[-50, 50]$. Kommentér og forklar de kvalitative forskelle. Prøv tilsvarende at sammenligne de to funktioner $\sinh(x)$ og $x + (x^3/6)$ på samme måde.

Det er naturligt og nyttigt at definere de hyperbolske analogier til $\tan(x)$ og $\cot(x)$. Det gør vi således:

|||| Definition 3.30 Hyperbolsk tangens og hyperbolsk cotangens

$$
\begin{aligned}
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \ , \ \mathcal{D}m(\tanh) = \mathbb{R} \ , \ \mathcal{V}m(\tanh) =]-1,1[\\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \ , \ \mathcal{D}m(\coth) = \mathbb{R} - \{0\} \ , \\
&\qquad \mathcal{V}m(\coth) =]-\infty,-1[\cup]1,\infty[\quad .
\end{aligned}
\tag{3-46}
$$

Differentialkvotienterne af $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ er allerede givet ved det definerende system i (3-41).

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\
\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \\
\frac{d}{dx}\tanh(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \\
\frac{d}{dx}\coth(x) &= \frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x) \quad .
\end{aligned}
\tag{3-47}
$$

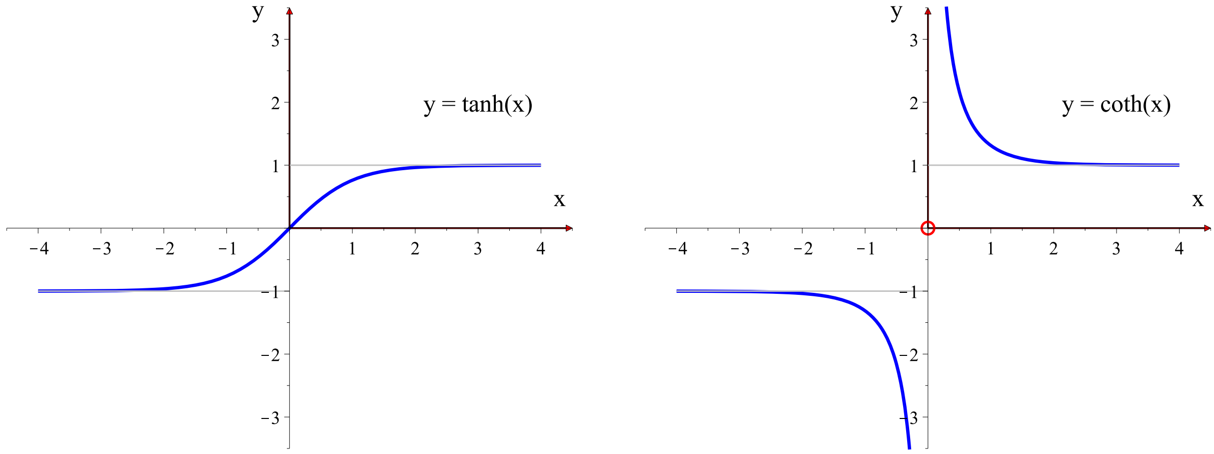


Figure 3.6: Hyperbolsk tangens, $\tanh(x)$, og hyperbolsk cotangens, $\coth(x)$.

|||| Opgave 3.31

Vis de to sidste udtryk for differentialkvotienterne for $\tanh(x)$ og $\coth(x)$ i (3-47) ved at benytte differentiationsreglen i sætning 3.18.

3.7 Areafunktionerne

De omvendte funktioner til de hyperbolske funktioner kaldes ***areafunktioner*** og betegnes med henholdsvis $\cosh^{\circ -1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)$, $\sinh^{\circ -1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$, $\tanh^{\circ -1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$, og $\coth^{\circ -1}(x) = \operatorname{arcoth}(x)$.

Da funktionerne $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$, og $\coth(x)$ alle kan udtrykkes ved eksponentialfunktioner er det ikke overraskende, at de omvendte funktioner og deres differentialkvotienter kan udtrykkes ved logaritmefunktioner. Vi samler informationerne her:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \ \text{ for } \quad x \in [1,\infty[\\
\operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \ \text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ \text{ for } \quad x \in]-1,1[\\
\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \ \text{ for } \quad x \in]-\infty,1[\cup]1,\infty[\quad .
\end{aligned}
\tag{3-48}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ \text{ for } \quad x \in]1,\infty[\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ \text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{1-x^2} \ \text{ for } \quad x \in]-1,1[\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{1-x^2} \ \text{ for } \quad x \in]-\infty 1[\cup]1,\infty[\quad .
\end{aligned}
\tag{3-49}
$$

3.8 Arcusfunktionerne

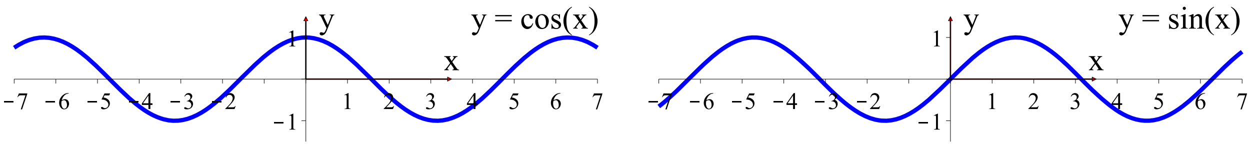


Figure 3.7: Cosinus og sinus funktionerne.

De omvendte funktioner som hører til de trigonometriske funktioner er lidt mere komplicerede. Som nævnt bliver vi her nødt til for hver trigonometrisk funktion at vælge et interval, hvor den pågældende funktion er monoton. Til gengæld, når vi *har* valgt et sådant interval, så er det klart, hvordan den omvendte funktion skal defineres og derefter hvordan den skal differentieres. De omvendte funktioner til $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$ betegnes henholdsvis $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, og $\operatorname{arccot}(x)$; de benævnes arcus-cosinus, arcus-sinus, arcus-tangens, og arcuscotangens. Ligesom ovenfor samler vi resultaterne her:

$$\begin{aligned}
\cos^{\circ -1}(x) &= \arccos(x) \in [0, \pi] \text{ for } \quad x \in [-1, 1] \\
\sin^{\circ -1}(x) &= \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ for } \quad x \in [-1, 1] \\
\tan^{\circ -1}(x) &= \arctan(x) \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \\
\cot^{\circ -1}(x) &= \text{arccot}(x) \in]0, \pi[\text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \quad .
\end{aligned} \tag{3-50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arccos(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ for } \quad x \in]-1, 1[\\
\frac{d}{dx}\arcsin(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ for } \quad x \in]-1, 1[\\
\frac{d}{dx}\arctan(x) &= \frac{1}{1+x^2} \text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}\text{arccot}(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \text{ for } \quad x \in \mathbb{R} \quad .
\end{aligned} \tag{3-51}$$

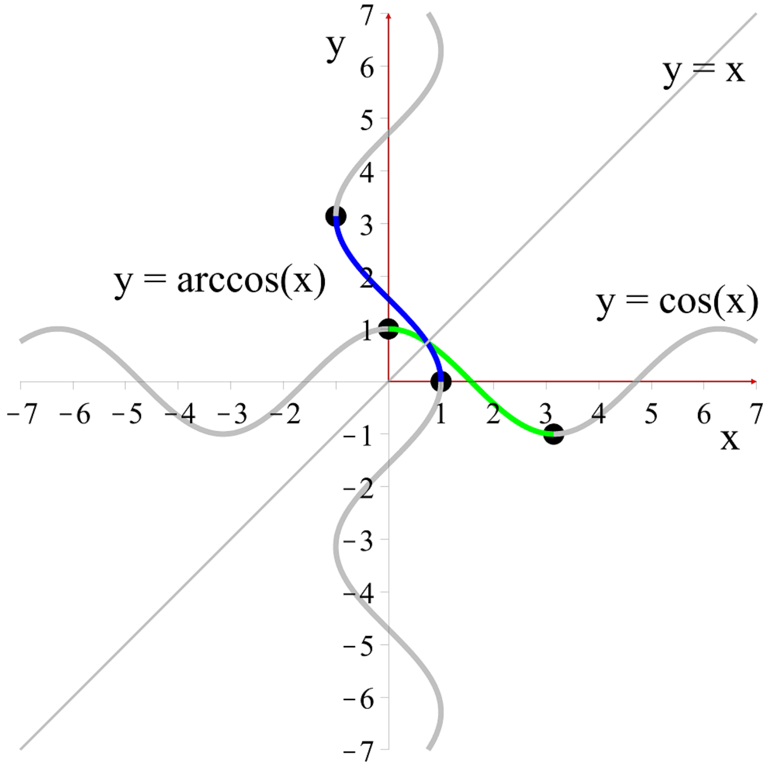


Figure 3.8: Arcus-cosinus funktionen defineres her.

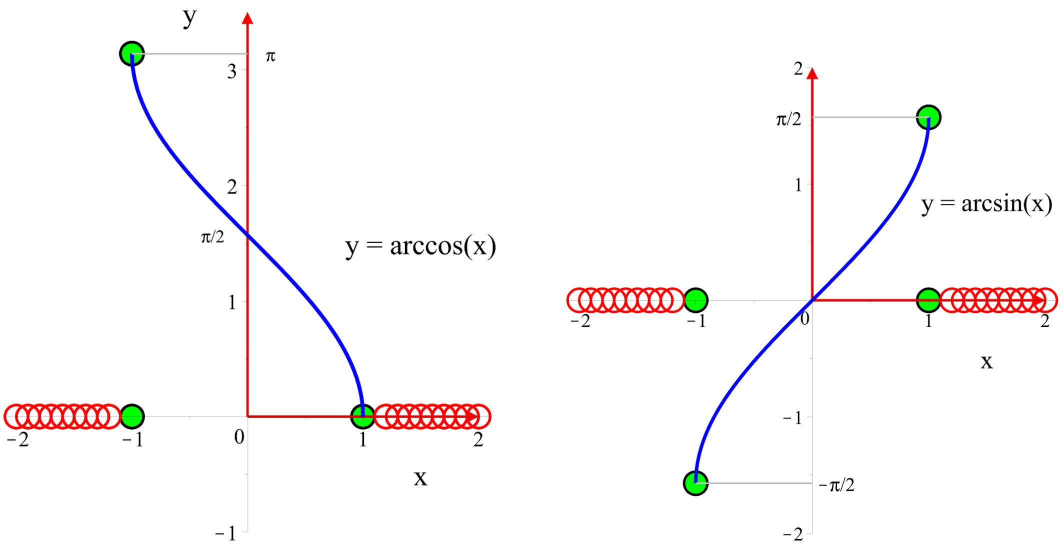


Figure 3.9: Arcus-cosinus og arcus-sinus. De røde cirkler indikerer igen, at arcus-funktionerne ikke er defineret udenfor intervallet $[-1,1]$. De grønne cirkelskiver indikerer tilsvarende, at arcus-funktionerne *er* defineret i endepunkterne $x = 1$ og $x = -1$.

Læg mærke til, at differerentialkvotienterne for $\arccos(x)$ og $\arcsin(x)$ ikke er defineret i $x_0 = 1$ og i $x_0 = -1$. Det skyldes dels, at hvis den funktion vi betragter kun er defineret i et begrænset interval, så kan vi ikke sige at funktionen er differentiabel i endepunkterne af intervallet. Desuden viser formlerne for $\arccos'(x)$ og $\arcsin'(x)$ at de ikke er definerede i $x_0 = 1$ eller $x_0 = -1$; de værdier giver jo 0 i nævnerne.

|||| Opgave 3.32

Benyt en passende modifikation af $\arctan(x)$ til at konstruere en ny differentiabel (og derfor kontinuert) funktion $f(x)$, som ligner 0-udvidelsen af $|x|/x$ (der hverken er kontinuert eller differentiabel), dvs. vi ønsker en funktion $f(x)$ med følgende egenskaber: $1 > f(x) > 0.999$ for $x > 0.001$ og $-0.999 > f(x) > -1$ for $x < -0.001$. Se figur 3.10. Vink: Prøv at plotte $\arctan(1000x)$.

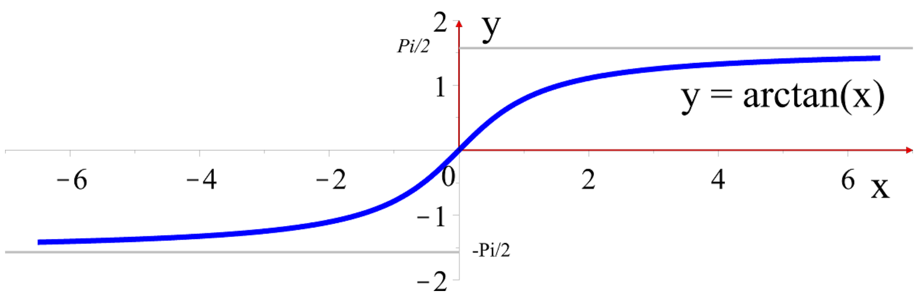


Figure 3.10: Arcus-tangens funktionen.

3.9 Opsummering

Vi har behandlet nogle af de fundamentale egenskaber ved nogle kendte og knap så kendte funktioner. Hvordan er de defineret, hvad er deres definitions-intervaller, er de kontinuerte, er de differentiable, hvad er i så fald deres differentialkvotienter?

- En funktion $f(x)$ er kontinuert i x_0 hvis $f(x) - f(x_0)$ er en epsilon-funktion af $(x - x_0)$, dvs.
$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0) \quad . \tag{3-52}$$

- En funktion $f(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $f'(x_0)$ hvis
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \quad .$$

- Hvis en funktion er differentiabel i x_0, så er den også kontinuert i x_0. Det omvendte gælder *ikke*.

- Differentialkvotienten af et produkt af to funktioner er
$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad . \tag{3-53}$$

- Differentialkvotienten af en brøk mellem to funktioner er
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad . \tag{3-54}$$

- Differentialkvotienten af en sammensat funktion er
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad . \tag{3-55}$$

- Differentialkvotienten af den omvendte funktion $f^{\circ -1}(x)$ er
$$\left(f^{\circ -1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{\circ -1}(x))} \quad . \tag{3-56}$$