eNote 1

Komplekse tal

I denne eNote introduceres og undersøges talmængden $\mathbb{C}$, de komplekse tal. Da $\mathbb{C}$ betragtes som en udvidelse af $\mathbb{R}$, forudsætter eNoten almindeligt kendskab til de reelle tal, herunder de elementære reelle funktioner som de trigonometriske funktioner og den naturlige eksponentialfunktion. Endelig forudsættes elementært kendskab til vektorer i planen. Opdateret 24.10.21 af Karsten Schmidt

1.1 Indledning

En simpel andengradsligning som $x^2 = 25$ har to reelle løsninger, nemlig

$$x = 5 \text{ og } x = -5\,,$$

idet $5^2 = 25$ og $(-5)^2 = 25$. På tilsvarende vis har ligningen $x^2 = 2$ to løsninger, nemlig

$$x = \sqrt{2} \text{ og } x = -\sqrt{2}\,,$$

idet $\sqrt{2}^{\,2} = 2$ og $(-\sqrt{2})^{\,2} = 2$.

I de ovenstående ligninger var højresiden *positiv*. Med ligningen

$$x^2 = k\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

skal vi passe mere på. Her afhænger alt nemlig af fortegnet på k. Hvis $k \geq 0$, har ligningen løsningerne

$$x = \sqrt{k} \text{ og } x = -\sqrt{k}\,,$$

idet $\sqrt{k}^{\,2} = k$ og $(-\sqrt{k})^{\,2} = k$. Men hvis $k < 0$, har ligningen ingen løsninger, da der ikke findes reelle tal, hvis kvadrat er negativt.

Men kunne man forestille sig en større mængde af tal end de reelle; en mængde, der indeholder alle de reelle tal, men derudover *også* en løsning til ligningen

$$x^2 = -1\,. \tag{1-1}$$

Lad det komme an på en prøve! Vi antager at (1-1) *har* en løsning og giver løsningen symbolet i. Så må (1-1) i analogi med ovenstående ligninger også have løsningen $-\mathrm{i}$, og vi opnår de to bemærkelsesværdige identiteter

$$\mathrm{i}^2 = -1 \;\text{ og }\; (-\mathrm{i})^2 = -1\,.$$

Vi stiller nu det ekstra krav til det hypotetiske tal i, at man skal kunne regne med det efter de samme regneregler, som gælder for de reelle tal. Man skal for eksempel kunne gange i med et reelt tal b og lægge denne størrelse til et andet reelt tal a. Hermed opstår et nyt slags tal z af typen

$$z = a + \mathrm{i}b\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Nedenfor beskriver vi, hvordan de nævnte ambitioner om en større talmængde kan imødekommes. Vi ser på, hvordan strukturen af talmængden må være, og hvilke lovmæssigheder den indeholder. Talmængden kalder vi *de komplekse tal* og giver den symbolet $\mathbb{C}$. Den må være *to-dimensional* i den forstand, at et komplekst tal indeholder *to* reelle tal a og b. Og som noget helt afgørende viser det sig at alle ligninger på formen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

hvor $a_0, \ldots, a_n$ er vilkårlige rationale tal (de såkaldte *algebraiske* ligninger) har løsninger inden for $\mathbb{C}$.

Man ser ofte tallet i indført ved $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Da det ligger uden for rammerne af denne eNote at give en præcis definition af kvadratroden af komplekse tal, undgår vi i det følgende skrivemåder hvor der tages kvadratrod af andre tal end reelle tal som er større end eller lig med 0.

1.2 Komplekse tal indført som reelle talpar

Den sædvanlige skrivemåde for et komplekst tal z er

$$z = a + \mathrm{i}b\,, \tag{1-2}$$

hvor a og b er reelle tal, og i er det nye *imaginære* tal, der opfylder $\mathrm{i}^2 = -1$. Denne form er særdeles praktisk ved regning med komplekse tal og derfor den form, der oftest ses i tekniske anvendelser. Men af teoretiske grunde kan vi ikke definere de komplekse tal ud fra formen (1-2). For hvad betyder egentlig et produkt som ib, og hvad betyder additionen $a + ib$?

En tilfredsstillende måde at indføre komplekse tal på er som mængden af reelle talpar (a, b). Vi vil i dette afsnit vise, hvordan man i denne mængde kan definere regneoperationer (addition, subtraktion, multiplikation og division), der opfylder de sædvanlige regneregler fra reelle tal. De vil vise sig at give skrivemåden (1-2) fuld mening.

|||| Definition 1.1 De komplekse tal

De komplekse tal $\mathbb{C}$ defineres som mængden af ordnede reelle talpar:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1-3}$$

Som symbol for et vilkårligt komplekst tal vil vi ofte bruge bogstavet z.

|||| Eksempel 1.2

Her angives fem forskellige komplekse tal:

$$z_1 = (2,7)\,,\ z_2 = (7,2)\,,\ z_3 = (0,1)\,,\ z_4 = (-5,0)\,,\ z_5 = (0,0)\,.$$

Først indfører vi regnearten addition for komplekse tal. Derefter subtraktion som en særlig form for addition.

|||| Definition 1.3 Addition af komplekse tal

Lad $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ være to komplekse tal.

Summen $z_1 + z_2$ defineres ved

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,. \tag{1-4}$$

|||| Eksempel 1.4 Addition

For de to komplekse tal $z_1 = (2, 7)$ og $z_2 = (4, -3)$ gælder:

$$z_1 + z_2 = (2, 7) + (4, -3) = (2 + 4, 7 + (-3)) = (6, 4)\,.$$

Det komplekse tal $(0, 0)$ er *neutralt* med hensyn til addition, idet der for ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ gælder:

$$z + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z\,.$$

Det er klart, at $(0, 0)$ er det eneste komplekse tal, som er neutralt med hensyn til addition.

For ethvert komplekst tal findes et *modsat* tal, som adderet med z giver $(0, 0)$. Det komplekse tal $z = (a, b)$ har det modsatte tal $(-a, -b)$, idet

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (a - a, b - b) = (0, 0)\,.$$

Det er klart, at $(-a, -b)$ er det eneste modsatte tal for $z = (a, b)$. Det entydigt bestemte modsatte tal til et komplekst tal z betegnes $-z$. Ved hjælp heraf kan subtraktion af komplekse tal indføres som en særlig form for addition.

|||| Definition 1.5 Subtraktion af komplekse tal

For to komplekse tal z_1 og z_2 defineres differensen $z_1 - z_2$ ved summen af z_1 og *det modsatte tal* for z_2 :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)\,. \tag{1-5}$$

Lad os for to vilkårlige komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ beregne differensen $z_1 - z_2$ ud fra definition 1.5:

$$z_1 - z_2 = (a, b) + (-c, -d) = (a + (-c), b + (-d)) = (a - c, b - d)\,.$$

Dette giver den enkle formel

$$z_1 - z_2 = (a - c, b - d)\,. \tag{1-6}$$

|||| Eksempel 1.6 Subtraktion af komplekse tal

For de to komplekse tal $z_1 = (5, 2)$ og $z_2 = (4, -3)$ gælder:

$$z_1 - z_2 = (5 - 4, 2 - (-3)) = (1, 5)\,.$$

Mens addition (og subtraktion) af komplekse tal synes enkel og naturlig, virker multiplikation (og division) af komplekse tal mere ejendommelig. Vi skal senere se, at alle fire regningsarter har markante geometriske ækvivalenter i den såkaldte *komplekse talplan*, som er den grafiske fremstilling af komplekse tal. Men i første omgang må vi blot tage definitionerne for gode varer. Først giver vi definitionen på multiplikation. Derefter på division som en særlig form for multiplikation.

|||| Definition 1.7 Multiplikation af komplekse tal

Lad $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ være to komplekse tal.

Produktet $z_1\, z_2$ defineres ved

$$z_1\, z_2 = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)\,. \tag{1-7}$$

|||| Eksempel 1.8 Multiplikation af komplekse tal

For de to komplekse tal $z_1 = (2, 3)$ og $z_2 = (1, -4)$ gælder:

$$z_1\, z_2 = (2, 3) \cdot (1, -4) = (2 \cdot 1 - (3 \cdot (-4)), 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1) = (14, -5)\,.$$

Det komplekse tal $(1, 0)$ er *neutralt* med hensyn til multiplikation, idet der for ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ gælder:

$$z \cdot (1, 0) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0\,, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = z\,.$$

Det er klart, at $(1, 0)$ er det eneste komplekse tal, som er neutralt med hensyn til multiplikation.

For ethvert komplekst tal z udover $(0, 0)$ findes et unikt *reciprokt* tal, som ganget med det z giver $(1, 0)$. Det betegnes $\frac{1}{z}$. Det komplekse tal $z = (a, b)$ har det reciprokke tal

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\,, - \frac{b}{a^2 + b^2} \right)\,, \tag{1-8}$$

idet

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\,, - \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)\,.$$

|||| Opgave 1.9

Vis, at ethvert komplekst tal $z \neq (0, 0)$ har netop ét reciprokt tal.

Ved hjælp af reciprokke tal kan vi nu indføre division som en særlig form for multiplikation.

|||| Definition 1.10 Division af komplekse tal

Lad z_1 og z_2 være vilkårlige komplekse tal, hvor $z_2 \neq (0, 0)$.

Kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ defineres som produktet af z_1 og *det reciprokke tal* $\frac{1}{z_2}$ for z_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\,. \tag{1-9}$$

Lad os for to vilkårlige komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d) \neq (0, 0)$ beregne kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ ud fra definition 1.10:

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a, b) \left(\frac{c}{c^2 + d^2}\,, - \frac{d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)\,.$$

Vi får hermed følgende formel for division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) . \tag{1-10}$$

|||| Eksempel 1.11 Division af komplekse tal

Betragt de to komplekse tal $z_1 = (1,2)$ og $z_2 = (3,4)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4}{3^2+4^2}, \frac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{3^2+4^2} \right) = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right) .$$

Vi slutter afsnittet med at vise, at de komplekse tal med de indførte regneoperationer opfylder regneregler kendt fra de reelle tal.

|||| Sætning 1.12 Egenskaber for komplekse tal

De komplekse tal overholder følgende regneregler:

1. Kommutativ regel for addition: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Associativ regel for addition: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Tallet $(0,0)$ er neutralt mht. addition
4. Ethvert z har et modsat tal $-z$ hvor $z + (-z) = (0,0)$
5. Kommutativ regel for multiplikation: $z_1\, z_2 = z_2\, z_1$
6. Associativ regel for multiplikation: $(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$
7. Tallet $(1,0)$ er neutralt mht. multiplikation
8. Ethvert $z \neq (0,0)$ har et reciprokt tal $\frac{1}{z}$, hvor $z \cdot \frac{1}{z} = (1,0)$
9. Distributiv regel: $z_1\, (z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$

|||| Bevis

Lad os se på egenskab 1, den kommutative regel. Der er givet to komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$. Der gælder, at

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = z_2 + z_1 \,.$$

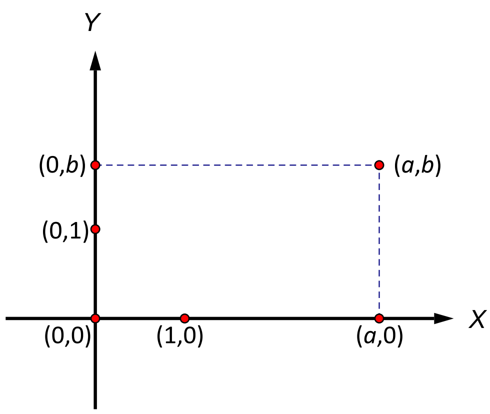
Ved det andet lighedstegn er der for både første- og andenkoordinat benyttet, at den kommutative lov for addition gælder for de reelle tal. Dermed ses at den kommutative regel også gælder for komplekse tal.

I beviset for egenskaberne $2, 5, 6$ og 9 udnyttes på tilsvarende måde, at de tilsvarende regler gælder for reelle tal. Detaljerne overlades til læseren. For egenskaberne $3, 4, 7$ og 8 henvises til gennemgangen tidligere i dette afsnit.

■

1.3 Komplekse tal på rektangulær form

Da der til ethvert ordnet reelt talpar svarer et unikt punkt i (x, y)-planen, og omvendt til ethvert punkt i (x, y)-planen svarer et unikt ordnet reelt talpar, kan $\mathbb{C}$ opfattes som mængden af punkter i (x, y)-planen. På figur 29.1 er vist seks punkter i (x, y)-planen, det vil sige seks komplekse tal.



Figur 29.1 Seks komplekse tal i (x, y)-planen

Vi vil i det følgende ændre skrivemåden for komplekse tal.

Først identificerer vi alle komplekse tal af typen $(a, 0)$, det vil sige de tal der ligger på x-aksen, med de tilsvarende reelle tal a. Specielt skrives tallet $(0, 0)$ som 0 og tallet $(1, 0)$ som 1. Bemærk, at dette ikke fører til konflikt mellem de indførte regnearter for komplekse tal og de sædvanlige for reelle tal, idet

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$$

og

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0\,, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)\,.$$

Derved kan x-aksen opfattes som en almindelig reel talakse og betegnes *realaksen*. På den måde kan de reelle tal ses som en delmængde af de komplekse. At y-aksen kaldes *imaginæraksen* hænger sammen med de forunderlige egenskaber for det komplekse tal i, som vi nu skal indføre og undersøge.

|||| Definition 1.13 Tallet i

Ved det komplekse tal i forstås tallet $(0, 1)$.

En afgørende motivation for indføringen af de komplekse tal var ønsket om en talmængde, der indeholder en løsning på ligningen

$$x^2 = -1\,.$$

Med tallet i har vi fået en løsning, idet der gælder:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1\,, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1\,.$$

|||| Sætning 1.14 Komplekse tals rektangulære form

Ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ kan skrives på formen

$$z = a + \mathrm{i} \cdot b = a + \mathrm{i}b\,. \tag{1-11}$$

Den skrivemåde kaldes *den rektangulære form* af z.

|||| Bevis

Beviset består i simple omregninger, hvor den nye skrivemåde for tal af typen $(a, 0)$ indgår.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + \mathrm{i}\, b\,.$$

■

Da $0 = (0, 0)$ er neutralt med hensyn addition, og $1 = (1, 0)$ er neutralt med hensyn multiplikation, gælder følgende identiteter:

$$0 + z = z \;\text{ og }\; 1z = z\,.$$

Endvidere ses nemt, at

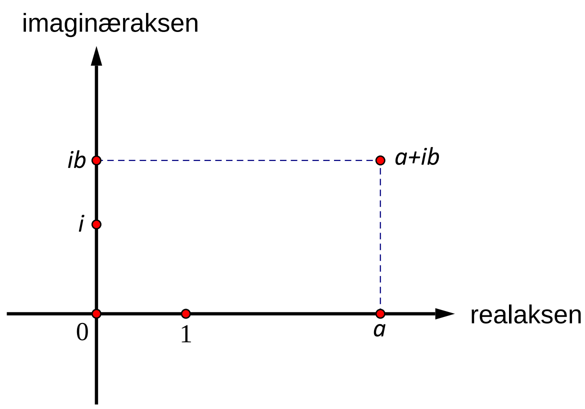
$$0z = 0\,.$$

Lad os nu betragte alle komplekse tal af typen $(0, b)$. Da

$$(0, b) = 0 + \mathrm{i}b = \mathrm{i}b\,,$$

kan i forstås som y-aksens enhed, og man omtaler derfor i som *den imaginære enhed*. Heraf kommer betegnelsen *imaginæraksen* for y-aksen.

På figur 29.2 ses en opdatering af situationen fra figur 29.1, hvor tallene betegnes ved deres rektangulære form.



Figur 29.2 Seks komplekse tal på rektangulær form i den komplekse talplan

Alle reelle tal er komplekse, men ikke alle komplekse tal er reelle!

Metode 1.15 Udregninger ved hjælp af rektangulær form

En afgørende fordel ved den rektangulære form af komplekse tal er, at man ikke behøver huske de formler for regneoperationerne addition, subtraktion, multiplikation og division, der blev givet i definitionerne 1.3, 1.5, 1.7 og 1.10. Alle udregninger kan nemlig udføres ved, at man følger de sædvanlige regneregler for reelle tal og behandler tallet i, som man ville behandle en reel variabel — dog med den forskel, at man kan erstatte i^2 med -1 .

I det følgende eksempel vises, hvordan multiplikation kan udføres ved sædvanlig regning med faktorernes rektangulære form.

Eksempel 1.16 Multiplikation vha. rektangulær form

Vi udregner produktet af de to komplekse tal givet på rektangulær form $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + \mathrm{i}d$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc - bd \\ &= (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)\,. \end{aligned}$$

Resultatet svarer til definitionen, se definition 1.7!

Opgave 1.17

Bevis, at den følgende regel for reelle tal — den såkaldte *nulregel* — også gælder for komplekse tal: "'Et produkt af to tal er 0, hvis og kun hvis mindst én af faktorerne er 0 ."'

|||| Bemærkning 1.18 Potenser for komplekse tal

Egenskab 6 i sætning 1.12 giver os mulighed for indføring af heltals-potenser for komplekse tal, der svarer til heltals-potenser for reelle tal. Lad i det følgende n betegne et naturligt tal.

1. $z^1 = z\,,\; z^2 = z \cdot z\,,\; z^3 = z \cdot z \cdot z$ osv.
2. Pr. definition sættes $z^0 = 1\,.$
3. Endelig sættes $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}\,.$

De vises nemt at de sædvanlige regneregler for heltals-potenser af reelle tal også gælder for de komplekse:

$$z^n\, z^m = z^{n+m} \;\text{ og }\; (z^n)^m = z^{n\,m}\,.$$

Vi afslutter dette afsnit med at indføre begreberne realdel og imaginærdel for komplekse tal.

|||| Definition 1.19 Realdel og imaginærdel

Givet et komplekst tal z med rektangulær form $z = a + ib$. Ved *realdelen* af z forstås det reelle tal

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + ib) = a\,, \tag{1-12}$$

og ved *imaginærdelen* af z forstås det reelle tal

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + ib) = b\,. \tag{1-13}$$

Udtrykket *rektangulær form* hentyder til tallets placering i den komplekse talplan, hvor $\operatorname{Re}(z)$ er tallets vinkelrette nedfældningspunkt på real-aksen, og $\operatorname{Im}(z)$ dets vinkelrette nedfældningspunkt på imaginæraksen. Realdelen er kort sagt tallets førstekoordinat, mens imaginærdelen er tallets andenkoordinat.

Bemærk, at ethvert komplekst tal z kan opskrives på rektangulær form således:

$$z = \operatorname{Re}(z) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(z)\,.$$

|||| Eksempel 1.20 Realdel og Imaginærdel

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 3 - 2\mathrm{i}\,,\; z_2 = \mathrm{i}5\,,\, z_3 = 25 + \mathrm{i}\,.$$

Find realdelen og imaginærdelen af hvert tal.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1) &= 3\,,\ \operatorname{Im}(z_1) = -2 \\ \operatorname{Re}(z_2) &= 0\,,\ \operatorname{Im}(z_2) = 5 \\ \operatorname{Re}(z_3) &= 25\,,\ \operatorname{Im}(z_3) = 1 \end{aligned}$$

To komplekse tal på rektangulær form er *ens*, hvis og kun hvis såvel deres realdele som deres imaginærdele er ens.

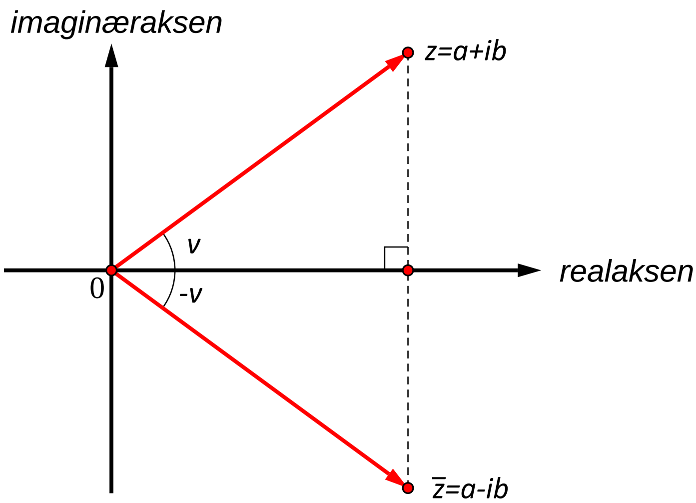
1.4 Konjugering af komplekse tal

Definition 1.21 Konjugering

Lad z være et komplekst tal med rektangulær form $z = a + ib$. Ved det konjugerede tal til z forstås det komplekse tal $\bar{z}$ givet ved

$$\bar{z} = a - ib\,. \tag{1-14}$$

At konjugere et komplekst tal svarer til at det spejles i realaksen som vist på figur 29.3.



Figur 29.3 Spejling i realaksen

Det er indlysende, at det konjugerede tal til et konjugeret tal er det oprindelige tal selv:

$$\bar{\bar{z}} = z\,. \tag{1-15}$$

Endvidere gælder følgende nyttige formel for produktet af et komplekst tal og dets konjugerede tal:

$$z \cdot \bar{z} = |\,z\,|^2 \tag{1-16}$$

som bevises ved simpel udregning.

I den følgende metode vises en snild metode til omskrivning af en brøk med imaginær nævner til rektangulær form, hvor vi udnytter at produktet af et tal $z = a + ib$ og dets konjugerede $z = a - ib$ *altid* bliver et reelt tal, jf. (1-16).

|||| Metode 1.22 Udregning af brøk med imaginær nævner

Huskereglen er: *Forlæng brøken med nævnerens konjugerede.* Her er nævneren opskrevet på rektangulær form:

$$\frac{z}{a+ib} = \frac{z(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{z(a-ib)}{a^2+b^2}.$$

Et eksempel:

$$\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-3\mathrm{i}}{1^2+1^2} = \frac{1-3\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

For konjugering i forbindelse med de fire sædvanlige regnearter gælder der følgende meget simple regler.

|||| Sætning 1.23 Regneregler for konjugering

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2} \quad , z_2 \neq 0\,.$

|||| Bevis

Beviset gennemføres ved simple omformninger ud fra tallenes rektangulære form. Som eksempel tager vi den første formel. Antag $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$. Så gælder:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - \mathrm{i}(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\,. \end{aligned}$$

■

Til sidst bemærker vi, at alle komplekse tal på realaksen er identiske med deres konjugerede tal, og at de er de eneste komplekse tal, der opfylder denne egenskab. Vi kan af den grund opstille et kriterium for, om et givet tal i en mængde af komplekse tal er reelt:

|||| Sætning 1.24 Realkriteriet

Lad A være en delmængde af $\mathbb{C}$, og lad $A_{\mathbb{R}}$ betegne den delmængde af A, som består af reelle tal. Der gælder:

$$A_{\mathbb{R}} = \{z \in A \,|\, \overline{z} = z\} \ .$$

|||| Bevis

Lad z være et vilkårligt tal i $A \subseteq \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = a + ib$. Der gælder da:

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in A_{\mathbb{R}} \, .$$

■

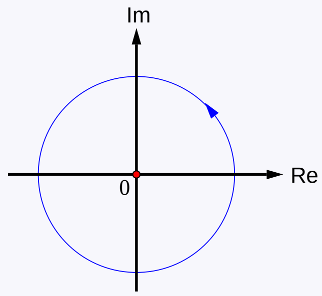
1.5 Polære koordinater

Den oplagte måde at angive et punkt (eller en stedvektor) i et sædvanligt (x, y)-koordinatsystem på er naturligvis ved punktets *rektangulære*, dvs. *retvinklede*, koordinater (a, b). I mange situationer er det imidlertid nyttigt at kunne bestemme et punkt ved dets *polære koordinater*, som består af punktets *afstand* til Origo samt dets *retningsvinkel* fra x-aksen til dets stedvektor. Retningsvinklen er da positiv, hvis den måles i retning mod uret, og negativ i retning med uret.

I det følgende indfører på tilsvarende vis polære koordinater for komplekse tal. Lad os først præcisere en orientering af den komplekse talplan.

Definition 1.25 Orientering af den komplekse talplan

Orienteringen af den komplekse talplan fastlægges ved, at en cirkel med centrum i tallet 0 gennemløbes *mod uret*.



Figur 29.4 Den komplekse talplans orientering

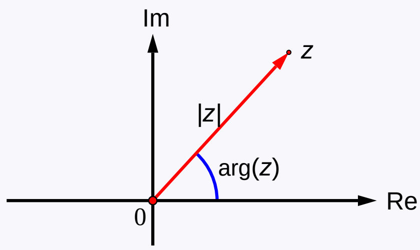
Ingredienserne i det komplekse tals polære koordinater er som nævnt dets afstand til Origo, kaldet *absolutværdien*, og dets retningsvinkel, kaldet *argumentet*. Dem indfører vi nu.

|||| Definition 1.26 Absolutværdi og argument

Givet et komplekst tal z .

Ved *absolutværdien* af z forstås længden af den til z hørende stedvektor. Absolutværdien skrives $|\,z\,|$ og kaldes også for tallets *modulus* eller *numeriske værdi*.

Antag $z \neq 0$. Enhver vinkel fra realaksens positive del til stedvektoren for z kaldes et *argument* for z og betegnes $\arg(z)$. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med orienteringen af den komplekse talplan.



Figur 29.5 Absolutværdi og argument

Et sammenhørende par

$$\left(\,|\,z\,|\,,\arg(z)\,\right)$$

af absolutværdien af z og et argument for z kaldes for tallets *polære koordinater*.

Bemærk, at argumentet for et tal z ikke er entydigt. Hvis man for eksempel lægger vinklen 2π til et vilkårligt argument for z, opnår man igen en gyldig retningsvinkel for z og dermed et nyt gyldigt argument. Et komplekst tal har derfor uendeligt mange argumenter, der hver svarer til at dreje et antal ekstra hele omgange med eller mod uret for igen at nå samme punkt.

Man kan altid vælge et argument for z, som ligger i intervallet fra $-\pi$ til π. Der er tradition for at give dette argument en fortrinsstilling. Det kaldes for tallets *hovedargument*.

|||| Definition 1.27 Hovedargument

Givet et komplekst tal z, som ikke er 0. Ved *hovedargumentet* $\operatorname{Arg}(z)$ for z forstås det entydigt bestemte argument for z, som opfylder:

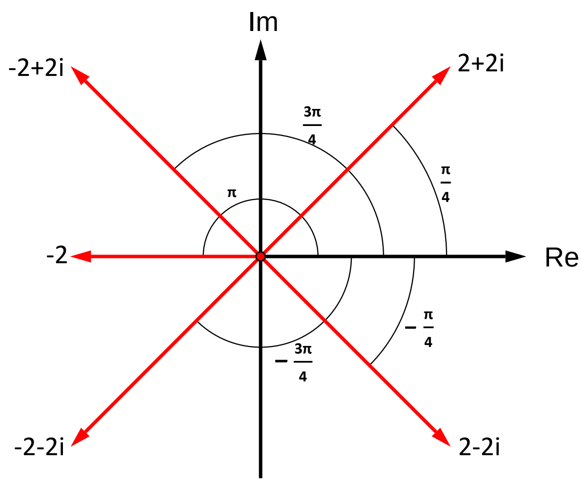
$$\arg(z) \in \left]-\pi, \pi\right].$$

Vi betegner *hovedargumentet* med stort forbogstav $\operatorname{Arg}(z)$ til forskel fra $\arg(z)$, der betegner et *vilkårligt* argument. Samtlige argumenter for et komplekst tal z er da fastlagt ved

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + p \cdot 2\pi \ , \ p \in \mathbb{Z}. \tag{1-17}$$

To komplekse tal er *ens*, hvis og kun hvis såvel deres absolutværdier som deres hovedargumenter er ens.

|||| Eksempel 1.28 Hovedargumenter



Figur 29.6 Hovedargumenter

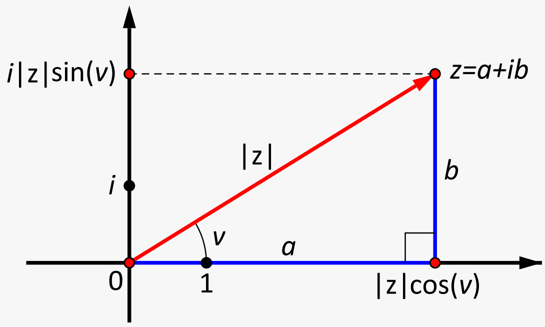
På figuren er angivet fem komplekse tal, hvoraf de fire ligger på vinkelhalveringslinjer mellem akserne. Vi aflæser:

- $2 + 2\mathrm{i}$ har hovedargumentet $\frac{\pi}{4}$,
- $2 - 2\mathrm{i}$ har hovedargumentet $-\frac{\pi}{4}$,
- $-2 + 2\mathrm{i}$ har hovedargumentet $\frac{3\pi}{4}$,
- $-2 - 2\mathrm{i}$ har hovedargumentet $-\frac{3\pi}{4}$, og
- -2 har hovedargumentet π .

Om det er mest fordelagtigt at benytte komplekse tals rektangulære form eller deres polære koordinater, afhænger af situationen. Det er derfor vigtigt, at man hurtigt kan veksle mellem dem. I metode 1.29 demonstreres det, hvordan man kan veksle mellem de to former.

|||| Metode 1.29 Rektangulære og polær koordinater

Vi betragter et komplekst tal $z \neq 0$, som har den rektangulære form $z = a + ib$ og et argument v:



Figur 29.7 Omformning mellem rektangulær form og polære koordinater

1. Rektangulær form fås ud fra de polære koordinater således:

$$a = |z| \cos(v) \ \text{ og } \ b = |z| \sin(v)\,. \tag{1-18}$$

2. Absolutværdien fås ud fra den rektangulære form således:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{1-19}$$

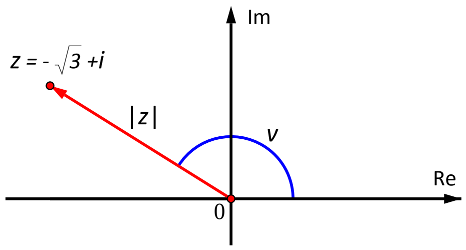
3. Et argument fås ud fra den rektangulære form ved at finde en vinkel v der opfylder *begge* disse ligninger:

$$\cos(v) = \frac{a}{|z|} \ \text{ og } \ \sin(v) = \frac{b}{|z|}\,. \tag{1-20}$$

Når z som på figuren i metode 1.29 er tegnet i første kvadrant, er det oplagt, at reglerne (1-18) og (1-20) kommer fra velkendte formler for cosinus og sinus til spidse vinkler i retvinklede trekanter og (1-19) fra Pythagoras' sætning. Med de samme formler kan det vises, at de indførte metoder gælder, uanset hvilken kvadrant z ligger i.

|||| Eksempel 1.30 Fra rektangulær til polær form

Find de polære koordinater for tallet $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.



Figur 29.8 Bestemmelse af polære koordinater

Vi benytter reglerne i metode 1.29. Først identificeres reel- og imaginærdelen af z som

$$a = -\sqrt{3} \quad \text{og} \quad b = 1.$$

Vi bestemmer først absolutværdien:

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^{\,2} + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2\,.$$

Dernæst bestemmes argumentet. Ud fra ligningen

$$\cos(v) = \frac{a}{|\,z\,|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

får vi to bud på et hovedargument for z , nemlig

$$v = \frac{5\pi}{6} \;\text{ og }\; v = -\frac{5\pi}{6}\,.$$

På figuren ses, at z ligger i 2. kvadrant, og det korrekte hovedargument må derfor være det førstnævnte. Men dette kan også fastlægges uden inspektion af figuren, idet også ligningen

$$\sin(v) = \frac{1}{2}$$

skal være opfyldt. Fra denne får vi også to bud på et hovedargument for z , nemlig

$$v = \frac{\pi}{6} \;\text{ og }\; v = \frac{5\pi}{6}\,.$$

Da kun $v = \dfrac{5\pi}{6}$ opfylder begge ligninger, ser vi, at $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Hermed har vi fundet det polære koordinatsæt for z :

$$(|z|, \mathrm{Arg}(z)) = \left(2\,,\, \frac{5\pi}{6}\right)\,.$$

Vi afslutter dette afsnit med de vigtige produktregler for absolutværdier og argumenter.

|||| Sætning 1.31 Produktreglen for absolutværdi

Absolutværdien for produktet af to komplekse tal z_1 og z_2 fås ved

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,. \tag{1-21}$$

Af sætning 1.31 fås følgesætningen

|||| Følgesætning 1.32

Absolutværdien for kvotienten af to komplekse tal z_1 og z_2 , hvor $z_2 \neq 0$, fås ved

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,. \tag{1-22}$$

Absolutværdien af den n'te potens af et komplekst tal z fås for ethvert $n \in \mathbb{Z}$ ved

$$|{z_1}^n| = |z_1|^n\,. \tag{1-23}$$

|||| Opgave 1.33

Nedskriv i ord, hvad formlerne (1-21), (1-22) og (1-23) siger, og bevis dem.

|||| Sætning 1.34 Produktreglen for argumenter

Givet to komplekse tal $z_1 \neq 0$ og $z_2 \neq 0$ (hvorved også $z_1 z_2 \neq 0$). Der gælder, at hvis v_1 er et argument for z_1, og v_2 er et argument for z_2, så er $v_1 + v_2$ et argument for produktet $z_1 z_2$.

|||| Følgesætning 1.35

Givet to komplekse tal $z_1 \neq 0$ og $z_2 \neq 0$, som begge er forskellige fra 0. Der gælder:

1. Hvis v_1 er et argument for z_1 og v_2 et argument for z_2, så er $v_1 - v_2$ et argument for brøken $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Hvis v er et argument for z, så er $n \cdot v$ et argument for potensen z^n.

|||| Opgave 1.36

Bevis sætning 1.34 og følgesætning 1.35.

1.6 Geometrisk forståelse af de fire regnearter

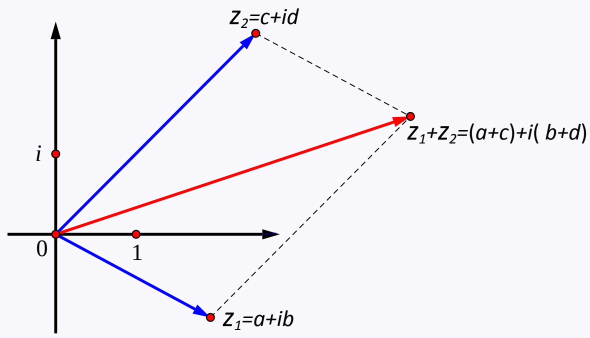
Vi startede med at indføre addition, subtraktion, multiplikation og division af komplekse tal som algebraiske operationer udført på reelle talpar (a, b), se definitionerne 1.3, 1.5, 1.7 og 1.10. Derefter viste vi, at de komplekse tals rektangulære form $a + ib$ fører til en mere praktisk måde at dyrke regnearterne på: man kan regne med de komplekse tal på samme måde som med de reelle, når blot tallet i behandles på samme måde som en reel parameter, og det udnyttes, at $\mathrm{i}^2 = -1$. I dette afsnit skal vi se, at regneoperationerne også kan forstås som geometriske konstruktioner.

Den første præcise beskrivelse af de komplekse tal blev givet af den norske landmåler Caspar Wessel i 1796. Wessel indførte komplekse tal som linjestykker med givne længder og retninger, altså det vi i dag kalder vektorer i planen. Regning med komplekse tal var derfor geometriske operationer udført på vektorer. I det følgende gengiver vi ideen i Wessels definitioner. Det er nemt at indse ækvivalensen mellem den algebraiske og geometriske repræsentation af addition og subtraktion — det kræver mere at forstå ækvivalensen forsåvidt angår multiplikation og division.

|||| Sætning 1.37 Geometrisk addition

Addition af to komplekse tal z_1 og z_2 kan opnås geometrisk på følgende måde:

Stedvektoren for $z_1 + z_2$ er summen af stedvektorerne for z_1 og z_2 .



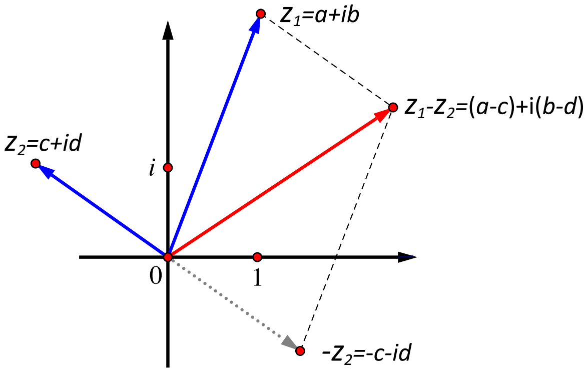
Figur 29.9 Addition ved parallelogram-metoden

|||| Bevis

Antag at z_1 og z_2 er givet på rektangulær form ved $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$. Så har stedvektoren for z_1 koordinatsættet (a, b) og stedvektoren for z_2 koordinatsættet (c, d) . Summen af de to stedvektorer er dermed $(a + c, b + d)$, som er stedvektoren for det komplekse tal $(a + c) + \mathrm{i}(b + d)$. Da der algebraisk gælder $z_1 + z_2 = (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$, er det ønskede vist.

■

Geometrisk subtraktion fås som en særlig form af geometrisk addition: Stedvektoren for $z_1 - z_2$ er summen af stedvektoren for z_1 og den modsatte vektor til stedvektoren for z_2 . Situationen er illustreret på figur 29.10.



Figur 29.10 Subtraktion ved parallelogram-metoden

Mens vi ved undersøgelsen af geometrisk addition (og substraktion) har benyttet de komplekse tals rektangulære form, får vi ved geometrisk multiplikation (og division) brug for deres polære koordinater.

|||| Sætning 1.38 Geometrisk multiplikation

Givet to komplekse tal z_1 og z_2, som begge er forskellige fra 0 (hvorved også $z_1 z_2 \neq 0$). Multiplikation af z_1 og z_2 kan opnås geometrisk på følgende måde:

1. Absolutværdien for produktet $z_1 z_2$ fås, når man ganger absolutværdien af z_1 med absolutværdien af z_2.
2. Et argument for produktet af $z_1 z_2$ fås, når man lægger et argument for z_1 sammen med et argument for z_2.

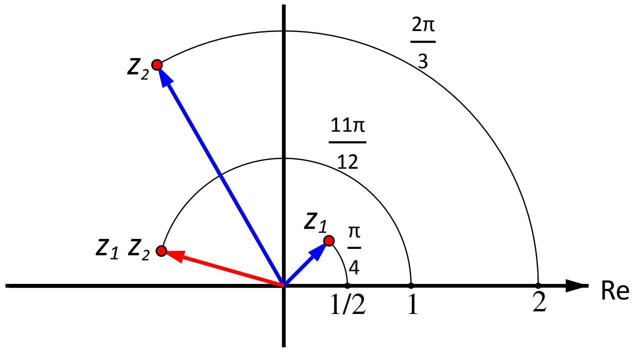
|||| Bevis

Første del af sætningen fremgår af sætning 1.31, mens anden del fremgår af sætning 1.34.

■

|||| Eksempel 1.39 Multiplikation vha. polære koordinater

To komplekse tal z_1 og z_2 er givet ved de polære koordinater $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ henholdsvis $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$.



Figur 29.11 Multiplikation

Vi udregner produktet af z_1 og z_2 ved hjælp af deres absolutværdier og argumenter:

$$|\,z_1 z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

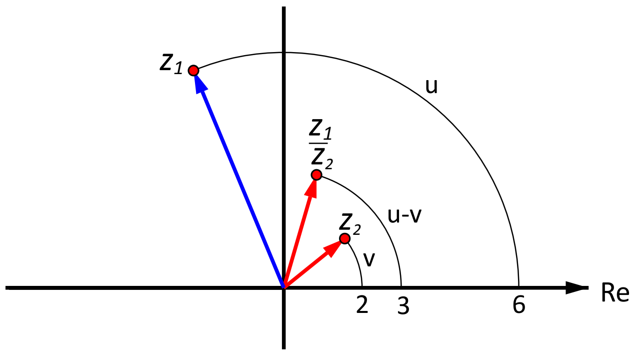
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}\,.$$

Produktet $z_1 z_2$ er altså det komplekse tal, som har absolutværdien 1 og argumentet $\dfrac{11\pi}{12}$.

Bemærk, at det er vigtigt at notere sig, om et koordinatsæt er givet i *rektangulære* eller i *polære* koordinater.

|||| Eksempel 1.40 Division vha. polære koordinater

Tallene z_1 og z_2 er givet ved $|z_1| = 6$ og $\arg(z_1) = u$ henholdvis $|z_2| = 2$ og $\arg(z_2) = v$.



Figur 29.12 Division

Derved kan $\dfrac{z_1}{z_2}$ bestemmes ved

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{6}{2} = 3 \;\text{ og }\; \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = u - v\,.$$

1.7 Den komplekse eksponentialfunktion

Den sædvanlige eksponentialfunktion $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$ har som bekendt de karakteristiske egenskaber ,

1. $e^0 = 1$,
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, og
3. $(e^x)^n = e^{nx}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{R}$.

I dette afsnit vil vi indføre en særdeles nyttig udvidelse af den reelle eksponentialfunktion til en kompleks eksponentialfunktion, der viser sig at opfylde de samme regneregler som den reelle.

Definition 1.41 Kompleks eksponentialfunktion

Ved den komplekse eksponentialfunktion $\exp_{\mathbb{C}}$ forstås en funktion, som til ethvert tal $z \in \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = x + \mathrm{i}y$ lader svarer tallet

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x \cdot (\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)), \tag{1-24}$$

hvor e er grundtallet $2.7182818\ldots$ for den reelle (naturlige) eksponentialfunktion.

Da vi for ethvert *reelt* tal x får

$$\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{C}}(x + \mathrm{i} \cdot 0) = \mathrm{e}^x\,(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = \mathrm{e}^x\,,$$

ser vi, at den komplekse eksponentialfunktion overalt på realaksen er identisk med den reelle eksponentialfunktion. Vi risikerer derfor ikke en modstrid, når vi i det følgende vil tillade (og flittigt bruge) skrivemåden

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \mathrm{e}^z \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1-25}$$

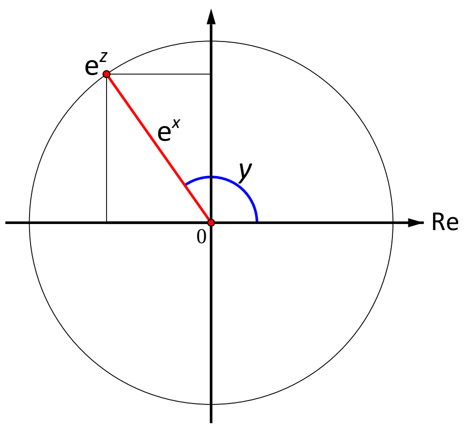
Vi betragter nu det komplekse tal e^z, hvor z er et vilkårligt komplekst tal med rektangulær form $z = x + \mathrm{i}y$. Der gælder da (ved brug af sætning 1.31), at

$$|\mathrm{e}^z| = |\mathrm{e}^x\,(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))| = |\mathrm{e}^x|\,|(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))| = |\mathrm{e}^x| = \mathrm{e}^x\,. \tag{1-26}$$

Endvidere gælder (ved brug af sætning 1.34), at

$$\arg\left(\mathrm{e}^z\right) = \arg\left(\mathrm{e}^x\right) + \arg\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right) = 0 + y = y\,. \tag{1-27}$$

De polære koordinater for e^z hvor $z = x + \mathrm{i}y$, er dermed (e^x, y). Dette er illustreret i figur 29.13.



Figur 29.13 Geometrisk fortolkning af e^z

For de trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ vides, at der for ethvert helt tal p gælder $\cos(x+p2\pi) = \cos(x)$ og $\sin(x+p2\pi) = \sin(x)$. Hvis man forskyder grafen for $\cos(x)$ eller $\sin(x)$ med et vilkårligt multiplum af 2π, vil den gå over i sig selv igen. Funktionerne kaldes derfor *periodiske* med *perioden* 2π.

Et lignende fænomen kan ses ved den komplekse eksponentialfunktion. Den har den *imaginære* periode $\mathrm{i}\,2\pi$. Dette hænger i høj grad sammen med periodiciteten af de trigonometriske funktioner, hvilket kan ses i beviset for den følgende sætning.

|||| Sætning 1.42 Periodicitet af e^z

For ethvert komplekst tal z og ethvert helt tal p gælder:

$$\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}p2\pi} = \mathrm{e}^z\,. \tag{1-28}$$

|||| Bevis

Antag, at z har rektangulær form $z = x + \mathrm{i}y$, og $p \in \mathbb{Z}$.

Der gælder:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+\mathrm{i}p2\pi} &= \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}(y+p2\pi)} \\ &= \mathrm{e}^x\big(\cos(y+p2\pi) + \mathrm{i}\sin(y+p2\pi)\big) = \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big) \\ &= \mathrm{e}^z\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

I det følgende eksempel illustreres periodiciteten af den komplekse eksponentialfunktion.

|||| Eksempel 1.43 Eksponentiel ligning

Bestem samtlige løsninger for ligningen

$$\mathrm{e}^z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}\,. \tag{1-29}$$

Vi skriver først z på rektangulær form: $z = x + iy$. I eksempel 1.30 har vi fundet, at hjøresiden i (1-29) har absolutvrdien $|z| = 2$ og hovedargumentet $v = \frac{5\pi}{6}$. Da venstresiden og højresiden skal have samme absolutværdi og samme argument, pånær et vilkårligt multiplum af 2π , fås

$$|\,e^z\,| = |\,-\sqrt{3}+i\,| \Leftrightarrow e^x = 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = \ln(2)$$

$$\arg(e^z) = \arg(-\sqrt{3}+i) \Leftrightarrow y = v + p2\pi = \frac{5\pi}{6} + p2\pi \;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Samtlige løsninger for (1-29) er dermed

$$z = x + iy = \ln(2) + i\left(\frac{5\pi}{6} + p2\pi\right) \;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Vi slutter afsnittet med at opstille og bevise de i indledningen nævnte regneregler kendt fra den reelle eksponentialfunktion.

|||| Sætning 1.44 Regneregler for kompleks eksponentialfunktion

1. $e^0 = 1$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ for alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
3. $(e^z)^n = e^{nz}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $z \in \mathbb{C}$

|||| Bevis

Punkt 1 i sætningen, at $e^0 = 1$, følger af at den komplekse eksponentialfunktion er identisk med den reelle på den reelle akse, jf. (1-25).

I punkt 2 sætter vi $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$. Via polære koordinatsæt og sætning 1.38 fås:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= (e^{x_1}, y_1) \cdot (e^{x_2}, y_2) = (e^{x_1} \cdot e^{x_1}, y_1 + y_2) = (e^{x_1+x_2}, y_1 + y_2) \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} \\ &= e^{z_1+z_2}\,. \end{aligned}$$

I punkt 3 sætter vi $z = x + iy$ og får via polære koordinatsæt samt gentagen anvendelse af sætning 1.38:

$$(\mathrm{e}^z)^n = ((\mathrm{e}^x)^n, n \cdot y) = (\mathrm{e}^{n\cdot x}, n \cdot y) = \mathrm{e}^{n\cdot x + \mathrm{i}\cdot n \cdot y} = \mathrm{e}^{n(x+\mathrm{i}\cdot y)}$$
$$= \mathrm{e}^{n\cdot z}\,.$$

Hermed er sætningen bevist.

■

|||| **Opgave 1.45**

Vis, at der for ethvert $z \in \mathbb{C}$ gælder $\mathrm{e}^z \neq 0\,.$

1.8 Komplekse tals eksponentielle form

Lad v være et vilkårligt reelt tal. Indsættes det rent imaginære tal iv i den komplekse eksponentialfunktion, fås af definition 1.41:

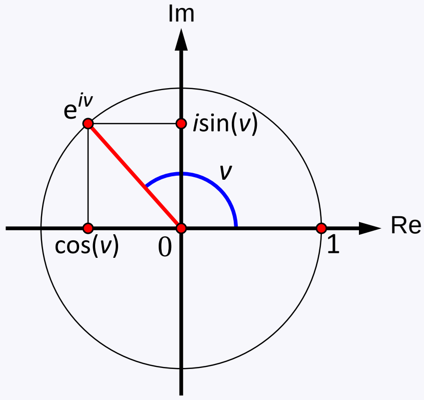
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{0+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^0\left(\cos(v) + \mathrm{i}\sin(v)\right),$$

hvorved den berømte *Eulers formel* fremkommer.

Sætning 1.46 Eulers formel

For ethvert $v \in \mathbb{R}$ gælder:

$$e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v)\,. \tag{1-30}$$



Figur 29.14 Tallet e^{iv} i den komplekse talplan

Ved hjælp af definitionen på den komplekse eksponentialfunktion, se definition 1.41, udledte vi Eulers formel. Nu kan vi omvendt benytte Eulers formel til at opskrive den komplekse eksponentialfunktion på den bekvemme form

$$e^{z} = e^{x}\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) = e^{x}e^{iy}\,. \tag{1-31}$$

De to mest brugte skrivemåder for komplekse tal i både teoretisk og anvendt matematik er den rektangulære form (som flittigt benyttet ovenfor) og den *eksponentielle* form. I den eksponentielle form optræder tallets polære koordinater (absolutværdi og argument) i forbindelse med den komplekse eksponentialfunktion:

Sætning 1.47 Komplekse tals eksponentiel form

Ethvert komplekst tal $z \neq 0$ kan skrives på formen

$$z = |z|\,e^{iv}\,, \tag{1-32}$$

hvor v er et argument for z. Skrivemåden kaldes tallets *eksponentielle form*.

|||| Bevis

Lad v være et argument for det komplekse tal $z \neq 0$, og sæt $r = |z|$. Vi viser, at tallet re^{iv} har samme absolutværdi og argument som z, hvormed de to tal er ens:

1. $$\left|re^{iv}\right| = |r| \left|e^{iv}\right| = r\,.$$

2. Da 0 er et argument for r, og v er et argument for e^{iv}, er $0 + v = v$ et argument for produktet re^{iv}.

■

|||| Metode 1.48 Udregninger ved hjælp af eksponentiel form

En afgørende fordel ved den eksponentielle form af komplekse tal er, at man ikke behøver tænke på regnereglerne for multiplikation, division og potensopløftning, når tallenes polære koordinater benyttes, se sætning 1.31, følgesætning 1.32 og sætning 1.34. Alle udregninger kan nemlig udføres ved, at man bruger de sædvanlige regneregler på tallenes eksponentielle form .

Vi giver nu et eksempel på multiplikation efter metode 1.48; sammenlign med eksempel 1.39.

|||| Eksempel 1.49 Multiplikation på eksponentiel form

To komplekse tal er givet på eksponentiel form,

$$z_1 = \frac{1}{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i} \;\text{ og }\; z_2 = 2\,e^{\frac{3\pi}{2}i}\,.$$

Produktet af tallene fås på eksponentiel form ved

$$z_1 z_2 = \Big(\frac{1}{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\Big)\Big(2\,e^{\frac{3\pi}{2}i}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\cdot 2\Big)e^{\frac{\pi}{4}i+\frac{3\pi}{2}i} = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{7\pi}{4}\,i}\,.$$

|||| Opgave 1.50

Gør rede for, at metode 1.48 er korrekt.

I det følgende vil vi vise hvordan, såkaldte *binome ligninger* kan løses ved hjælp af eksponentiel form. En binom ligning er en *toleddet* ligning på formen

$$z^n = w\,, \tag{1-33}$$

hvor $w \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$. Binome ligninger er beskrevet dybere i eNote 2 om polynomier, se afsnit 2.4.1. polynomier.

Vi viser først et eksempel på løsning af en binom ligning ved hjælp af eksponentiel form og opstiller derefter den generelle metode.

|||| Eksempel 1.51 Binom ligning på eksponentiel form

Find samtlige løsninger på den binome ligning

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,. \tag{1-34}$$

Ideen er, at vi skriver såvel z som højresiden på eksponentiel form.

Hvis z har den eksponentielle form $z = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$, kan ligningens venstreside udregnes ved

$$z^4 = (s\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})^4 = s^4\,(e^{\mathrm{i}u})^4 = s^4\,e^{\mathrm{i}4u}\,. \tag{1-35}$$

Højresiden opstilles nu ligeledes på eksponentiel form. Højresidens absolutværdi r findes ved

$$r = |\,-8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16\,.$$

Højresidens argument v opfylder

$$\cos(v) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \text{ og } \sin(v) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ved hjælp af de to ligninger kan højresidens hovedargument fastlægges til

$$v = \arg(-8 + 8\sqrt{3}\mathrm{i}) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

og dermed er den eksponentielle form af højresiden

$$re^{iv} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}. \tag{1-36}$$

Vi indsætter nu (1-35) og (1-36) i (1-34) for at erstatte højre- og venstresiden med de eksponentielle former

$$s^4\, e^{i4u} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Da ventresidens absolutværdi skal være lig højresidens, får vi

$$s^4 = 16 \;\Leftrightarrow\; s = \sqrt[4]{16} = 2\,.$$

Venstresidens argument $4u$ og højresidens argument $\frac{2\pi}{3}$ skal være ens på nær et multiplum af 2π. Heraf fås

$$4u = \frac{2\pi}{3} + p2\pi \;\Leftrightarrow\; u = \frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2}\;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Disse uendeligt mange argumenter svarer vel at mærke, som vi har set tidligere, kun til *fire* halvlinjer ud fra Origo bestemt ved de argumenter, der fås ved $p = 0, p = 1, p = 2$ og $p = 3$. For alle andre værdier af p vil den tilsvarende halvlinje være identisk med en af de fire nævnte. For eksempel vil halvlinjen for $p = 4$ være givet ved argumentet

$$u = \frac{\pi}{6} + 4\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\,,$$

det vil sige samme halvlinje som svarer til $p = 0$, da forskellen på argumenterne er en hel omgang, altså 2π.

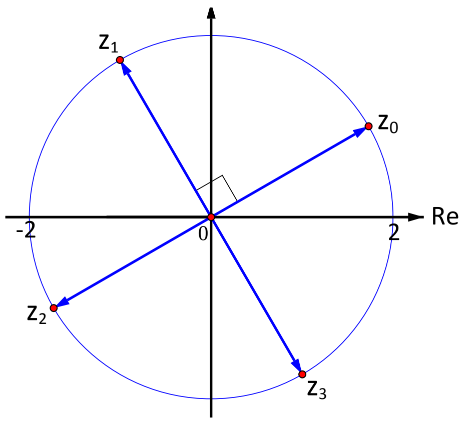
Den givne ligning (1-34) har derfor netop fire løsninger, som ligger på de nævnte fire halvlinjer i afstanden $s = 2$ fra 0. Angivet på eksponentiel form:

$$z = 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2})}\;,\; p = 0\,,1\,,2\,,3\,.$$

Eller omregnet hver for sig til rektangulær form ved brug af Eulers formel (1-30):

$$z_0 = \sqrt{3}+i\,,\; z_1 = -1+i\sqrt{3}\,,\; z_2 = -\sqrt{3}-i\,,\; z_3 = 1-i\sqrt{3}\,.$$

Alle løsningerne for en binom ligning ligger på en cirkel med centrum i 0 og radius lig med højresidens absolutværdi. Forbindelseslinjerne mellem Origo og løsningerne deler cirklen i lige store vinkler. Dette eksemplificeres på figur 29.15, der viser løsningerne på fjerdegradsligningen fra eksempel 1.51.



Figur 29.15 De fire løsningerne for $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

Fremgangsmåden i eksempel 1.51 generaliserer vi i den følgende sætning. Sætningen bevises i eNote 2 om polynomier.

|||| Sætning 1.52 Binom ligning løst vha. eksponentiel form

Givet et komplekst tal w, som ikke er 0, og som har den eksponentielle form

$$w = |w|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}v}\,.$$

Den binome ligning

$$z^n = w\,,\ n \in \mathbb{N} \tag{1-37}$$

har n løsninger, som kan findes ved formlen

$$z = \sqrt[n]{|w|}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)}\,,\ \text{ hvor }\ p = 0\,,1\,,\ldots\,,n-1\,. \tag{1-38}$$

|||| Opgave 1.53 Binom ligning med negativ højreside

Lad r være et vilkårligt positivt reelt tal. Vis ved hjælp af sætning 1.52, at den binome andengradsligning

$$z^2 = -r$$

har de to løsninger

$$z_0 = \mathrm{i}\,\sqrt{r} \ \text{ og }\ z_1 = -\mathrm{i}\,\sqrt{r}\,.$$

1.9 Første og andengradsligninger

Lad a og b være komplekse tal med $a \neq 0$. En *kompleks førstegradsligning* på formen

$$az = b$$

har ligesom den tilsvarende reelle førstegradsligning netop én løsning

$$z = \frac{b}{a}.$$

Hvis a og b er på rektangulær form, finder man nemt en løsning på rektangulær form, som vist i det følgende eksempel.

|||| Eksempel 1.54 Løsning af førstegradsligning

Ligningen

$$(1 - \mathrm{i})\, z = (5 + 2\mathrm{i})$$

har løsningen

$$z = \frac{5+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(5+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{3+7\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\,\mathrm{i}.$$

Også ved løsning af *komplekse andengradsligninger* benytter vi en formel, der svarer til den velkendte løsningsformel for reelle andengradsligninger. Dette gives i følgende sætning, der bevises i eNote 2 om polynomier.

|||| Sætning 1.55 Løsningsformel for kompleks andengradsligning

Lad a, b og c være vilkårlige komplekse tal med $a \neq 0$. Vi definerer *diskriminanten* ved $D = b^2 - 4ac$. Andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{1-39}$$

har to løsninger

$$z_0 = \frac{-b - w_0}{2a} \quad \text{og} \quad z_1 = \frac{-b + w_0}{2a}, \tag{1-40}$$

hvor w_0 er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D$.

Hvis specielt $D = 0$, gælder der, at $z_0 = z_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

I denne eNote indfører vi ikke kvadratrødder af komplekse tal. Derfor afviger den komplekse løsningsformel ovenfor i en enkelt detalje fra den sædvanlige reelle løsningsformel.

Konkrete eksempler på anvendelsen af sætning 1-39 findes i eNote 2 om polynomier, se afsnit 2.4.2.

1.10 Komplekse funktioner af en reel variabel

I dette afsnit benyttes teorien om såkaldte epsilonfunktioner til indføring af differentiabilitet. Stoffet er en anelse mere avanceret end hidtil, og viden om epsilonfunktioner fra eNote 3 kan være en fordel. Desuden bør læseren være bekendt med differentiationsregneregler for sædvanlige reelle funktioner.

Du bør bide godt mærke i funktioner af typen

$$f : t \mapsto \mathrm{e}^{ct} \,,\; t \in \mathbb{R} \,, \tag{1-41}$$

hvor c er et givet komplekst tal. Denne type funktioner har vid udbredelse i såvel teoretisk som anvendt matematik. Et hovedformål med dette afsnit er at beskrive dem nærmere. De er eksempler på de såkaldte *komplekse funktioner af en reel variabel*. Vores undersøgelse starter bredt med denne større klasse af funktioner. Vi viser blandt andet, hvordan begreber som differentiabilitet og differentialkvotient kan overføres til dem. Derefter går vi i dybden med funktionstypen (1-41).

|||| Definition 1.56 Kompleks funktion af en reel variabel

Ved en *kompleks funktion af en reel variabel* forstås en funktion f, som til ethvert $t \in \mathbb{R}$ knytter ét komplekst tal, som betegnes $f(t)$. En kort skrivemåde for en funktion f af denne type er

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \,.$$

Notationen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ fortæller, at vi i funktionen f benytter en variabel i det reelle talrum, men ender med et resultat i det komplekse talrum. Tag for eksempel funktionen $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. I det reelle tal $t = \frac{\pi}{4}$ får vi den komplekse funktionsværdi

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\,.$$

Lad os betragte en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Vi indfører to reelle funktioner g og h ved

$$g(t) = \mathrm{Re}\big(f(t)\big) \;\text{ og }\; h(t) = \mathrm{Im}\big(f(t)\big)$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Herved kan f angives på *rektangulær form*:

$$f(t) = g(t) + \mathrm{i}\cdot h(t)\,,\; t \in \mathbb{R}\,. \tag{1-42}$$

Når vi i det følgende skal indføre differentiabilitet for komplekse funktioner af en reel variabel, får vi brug for en speciel type af dem, nemlig de såkaldte *epsilonfunktioner*. I lighed med *reelle* epsilonfunktioner er det hjælpefunktioner, hvis funktionsudtryk man som regel ikke er interesseret i. De to afgørende egenskaber for en reel epsilonfunktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ er, at den opfylder $\epsilon(0) = 0$, og at $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to 0$. De komplekse epsilonfunktion indføres på tilsvarende vis.

|||| Definition 1.57 Epsilon-funktion

Ved en *kompleks epsilonfunktion af en reel variabel* forstås en funktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, som opfylder:

1. $\epsilon(0) = 0$, og
2. $|\epsilon(t)| \to 0 \;$ for $\; t \to 0\,.$

Bemærk, at hvis ϵ er en epsilonfunktion, så følger det direkte af definition 1.57, at der for ethvert $t_0 \in \mathbb{R}$ gælder:

$$|\,\epsilon(t - t_0)\,| \to 0 \;\text{ for }\; t \to t_0\,.$$

I det følgende eksempel vises et par komplekse epsilonfunktioner af en reel variabel.

|||| Eksempel 1.58 Epsilonfunktioner

Funktionen
$$t \mapsto \mathrm{i}\sin(t)\,,\; t \in \mathbb{R}$$
er en epsilonfunktion. Det ses, da krav 1 i definition 1.57 er opfyldt ved
$$\mathrm{i}\sin(0) = \mathrm{i}\cdot 0 = 0$$

og krav to ved
$$|\mathrm{i}\sin(t)| = |\mathrm{i}|\,|\sin(t)| = |\sin(t)| \to 0 \;\text{ for }\; t \to 0\,.$$

Også funktionen
$$t \mapsto t + \mathrm{i}t\,,\; t \in \mathbb{R}$$
er en epsilonfunktion, idet
$$0 + \mathrm{i}\cdot 0 = 0$$
og
$$|t + \mathrm{i}t| = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}\,|t| \to 0 \;\text{ for }\; t \to 0\,.$$

Vi er nu rede til af indføre begrebet *differentiabilitet* for komplekse funktioner af en reel variabel.

|||| Definition 1.59 Differentialkvotient for kompleks funktion

En funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ kaldes *differentiabel* i $t_0 \in \mathbb{R}$, hvis der findes en konstant $c \in \mathbb{C}$ og en epsilon-funktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ sådan, at
$$f(t) = f(t_0) + c(t - t_0) + \epsilon(t - t_0)(t - t_0)\,,\; t \in \mathbb{R}\,. \tag{1-43}$$

Hvis f er differentiabel i t_0, kaldes c for *differentialkvotienten* for f i t_0.

Hvis f er differentiabel i ethvert t_0 i et åbent interval I, siges f at være *differentiabel* på I.

Differentiabilitet for en kompleks funktion af en reel variabel hænger nøje sammen med differentiabiliteten for de to reelle dele af dens rektangulære form. Det viser vi nu.

|||| Sætning 1.60

For en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ med rektangulær form $f(t) = g(t) + ih(t)$ og et komplekst tal c med rektangulær form $c = a + ib$ gælder:

f er differentiabel i $t_0 \in \mathbb{R}$ med
$$f'(t_0) = c\,,$$
hvis og kun hvis g og h er differentiable i t_0 med
$$g'(t_0) = a \quad \text{og} \quad h'(t_0) = b\,.$$

|||| Bevis

Antag først, at f er differentiabel i t_0 og $f'(t_0) = a + ib$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Så findes der en epsilon-funktion ϵ sådan, at f for ethvert t kan skrives på formen
$$f(t) = f(t_0) + (a + ib)(t - t_0) + \epsilon(t - t_0)(t - t_0)\,.$$
Vi omskriver såvel ventre- som højresiden til rektangulær form:
$$\begin{aligned}&g(t) + ih(t) = \\ &g(t_0) + ih(t_0) + a(t - t_0) + ib(t - t_0) + \mathrm{Re}(\epsilon(t - t_0)(t - t_0)) + i\mathrm{Im}(\epsilon(t - t_0)(t - t_0)) = \\ &(g(t_0) + a(t - t_0) + \mathrm{Re}(\epsilon(t - t_0))(t - t_0)) + i(h(t_0) + b(t - t_0) + \mathrm{Im}(\epsilon(t - t_0))(t - t_0))\,.\end{aligned}$$

Heraf fås
$$g(t) = g(t_0) + a(t - t_0) + \mathrm{Re}(\epsilon(t - t_0))(t - t_0) \;\text{ og }\; h(t) = h(t_0) + b(t - t_0) + \mathrm{Im}(\epsilon(t - t_0))(t - t_0)\,.$$
For at kunne konkludere, at g og h er differentiable i t_0 med $g'(t_0) = a$ og $h'(t_0) = b$, mangler vi blot at vise, at $\mathrm{Re}(\epsilon)$ og $\mathrm{Im}(\epsilon)$ er reelle epsilonfunktioner. Dette følger af, at

1. $\epsilon(0) = \mathrm{Re}(\epsilon(0)) + i\mathrm{Im}(\epsilon(0)) = 0$ medfører, at $\mathrm{Re}(\epsilon(0)) = 0$ og $\mathrm{Im}(\epsilon(0)) = 0$, og at
2. $|\epsilon(t)| = \sqrt{|\mathrm{Re}(\epsilon(t))|^2 + |\mathrm{Im}(\epsilon(t))|^2} \to 0$ for $t \to 0$ medfører, at $\mathrm{Re}(\epsilon(t)) \to 0$ for $t \to 0$ og $\mathrm{Im}(\epsilon(t)) \to 0$ for $t \to 0$.

Den omvendte påstand i sætningen vises på tilsvarende vis.

■

Hvis $f(t) = g(t) + ih(t)$ er differentiabel på et åbent interval I gælder der

$$f'(t) = g'(t) + ih'(t)\,,\ t \in I.$$

|||| Eksempel 1.61 Differentialkvotient af kompleks funktion

Ved udtrykket

$$f(t) = t + \mathrm{i}t^2$$

er der defineret en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Da realdelen af f har den afledede funktion 1 og imaginærdelen af f den afledede $2t$, får vi af sætning 1.60:

$$f'(t) = 1 + \mathrm{i}2t\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

|||| Eksempel 1.62 Differentialkvotient af kompleks funktion

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ givet ved

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Da $\cos'(t) = -\sin(t)$ og $\sin'(t) = \cos(t)$, ses af sætning 1.60, at

$$f'(t) = -\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

I den følgende sætning betragter vi de såkaldte *lineære* egenskaber ved differentiation. Disse er velkendte fra reelle funktioner.

|||| Sætning 1.63 Regneregler for differentialkvotient

Lad f_1 og f_2 være differentiable komplekse funktioner af en reel variabel, og lad c være et vilkårligt komplekst tal. Der gælder da:

1. Funktionen $f_1 + f_2$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$(f_1 + f_2)'(t) = {f_1}'(t) + {f_2}'(t) \,. \tag{1-44}$$

2. Funktionen $c \cdot f_1$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$(c \cdot f_1)'(t) = c \cdot {f_1}'(t) \,. \tag{1-45}$$

|||| Bevis

Lad $f_1(t) = g_1(t) + \mathrm{i}\, h_1(t)$ og $f_2(t) = g_2(t) + \mathrm{i}\, h_2(t)$, hvor g_1, h_1, g_2 og h_2 er differentiable reelle funktioner. Lad endvidere $c = a + ib$ være et vilkårligt komplekst tal på rektangulær form.

Sætningens første del:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) &= g_1(t) + \mathrm{i}\, h_1(t) + g_2(t) + \mathrm{i}\, h_2(t) \\ &= (g_1(t) + g_2(t)) + \mathrm{i}\,(h_1(t) + h_2(t)) \ .\end{aligned}$$

Vi får da fra sætning 1.60 og ved brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)'(t) &= (g_1 + g_2)'(t) + \mathrm{i}\,(h_1 + h_2)'\,(t) \\ &= \left(g_1'(t) + g_2'(t)\right) + \mathrm{i}\,\left(h_1'(t) + h_2'(t)\right) \\ &= \left(g_1'(t) + \mathrm{i}\, h_1'(t)\right) + g_2'(t) + \mathrm{i}\, h_2'(t) \\ &= f_1'(t) + f_2'(t) \,.\end{aligned}$$

Hermed er sætningens første del bevist.

Sætningens anden del:

$$\begin{aligned}c \cdot f_1(t) &= (a + ib) \cdot (g_1(t) + \mathrm{i}\, h_1(t)) \\ &= (a\, g_1(t) - b\, h_1(t)) + \mathrm{i}\,(a\, h_1(t) + b\, g_1(t)) \ .\end{aligned}$$

Vi får fra sætning 1.60 og ved brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned}(c\cdot f_1)'(t) &= (a\,g_1 - b\,h_1)'\,(t) + \mathrm{i}\,(a\,h_1 + b\,g_1)'\,(t)\\ &= \left(a\,g_1'(t) - b\,h_1'(t)\right) + \mathrm{i}\left(a\,h_1'(t) + b\,g_1'(t)\right)\\ &= (a+\mathrm{i}b)\left(g_1'(t) + \mathrm{i}\,h_1'(t)\right)\\ &= c\cdot f_1'(t)\,.\end{aligned}$$

Hermed er sætningens anden del bevist.

■

|||| Opgave 1.64

Vis, at hvis f_1 og f_2 er differentiable komplekse funktioner af en reel variabel, så er funktionen $f_1 - f_2$ differentiabel med differentialkvotienten

$$(f_1 - f_2)'(t) = f_1'(t) - f_2'(t)\,. \tag{1-46}$$

Vi vender nu tilbage til funktioner af typen (1-41). Først giver vi et nyttigt resultat om deres konjugering.

|||| Sætning 1.65

For et vilkårligt komplekst tal c og ethvert reelt tal t gælder:

$$\overline{\mathrm{e}^{ct}} = \mathrm{e}^{\bar{c}\,t}\,. \tag{1-47}$$

|||| Bevis

Lad $c = a + ib$ være den rektangulære form af c. Vi får da ved brug af definition 1.41 og regnereglerne for konjugering i sætning 1.23:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{e}^{ct}} &= \overline{\mathrm{e}^{at+ibt}} \\ &= \overline{e^{at}\left(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)\right)} \\ &= \overline{e^{at}}\ \overline{\left(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)\right)} \\ &= e^{at}\left(\cos(bt) - \mathrm{i}\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\left(\cos(-bt) + \mathrm{i}\sin(-bt)\right) \\ &= e^{at-ibt} \\ &= e^{\bar{c}t}\,.\end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

For sædvanlige reelle eksponentialfunktioner af typen

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}\ ,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

hvor k er en reel konstant, gælder der som bekendt, at

$$f'(x) = kf(x) = k\mathrm{e}^{kx}\,. \tag{1-48}$$

Vi slutter eNoten af med at vise, at den komplekse eksponentialfunktion af en reel variabel opfylder en helt tilsvarende differentiationsregel.

|||| Sætning 1.66 Differentiation af e^{ct}

Betragt et vilkårligt tal $c \in \mathbb{C}$. Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ givet ved

$$f(t) = \mathrm{e}^{ct}\,,\ t \in \mathbb{R} \tag{1-49}$$

er differentiabel, og dens differentialkvotient er bestemt ved

$$f'(t) = cf(t) = c\mathrm{e}^{ct}\,. \tag{1-50}$$

|||| Bevis

Lad c's rektangulære form være $c = a + ib$. Vi får da

$$\begin{aligned} e^{ct} &= \mathrm{e}^{at+\mathrm{i}bt} \\ &= e^{at}\left(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\cos(bt) + \mathrm{i}\left(e^{at}\sin(bt)\right) . \end{aligned}$$

Vi har altså

$$f(t) = g(t) + \mathrm{i}h(t)\,, \text{ hvor } g(t) = e^{at}\cos(bt) \text{ og } h(t) = e^{at}\sin(bt)\,.$$

Da g og h er differentiable, er også f differentiabel . Da endvidere

$$g'(t) = a\mathrm{e}^{at}\cos(bt) - \mathrm{e}^{at}b\sin(bt) \text{ og } h'(t) = a\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + \mathrm{e}^{at}b\cos(bt)\,,$$

får vi nu

$$\begin{aligned} f'(t) &= a\mathrm{e}^{at}\cos(bt) - \mathrm{e}^{at}b\sin(bt) + \mathrm{i}\left(a\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + \mathrm{e}^{at}b\cos(bt)\right) \\ &= (a + \mathrm{i}b)e^{at}\left(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)\right) \\ &= (a + \mathrm{i}b)e^{at+\mathrm{i}bt} \\ &= c\,\mathrm{e}^{ct}\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

Hvis c i sætning 1.66 er reel, udtrykker (1-50) naturligvis blot den sædvanlige differentiation af den reelle eksponentialfunktion som antydet i (1-48). Også hvad differentiation angår er den komplekse eksponentialfunktion af en reel variabel dermed en udvidelse af den reelle.