DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 13. maj 2024.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Om en glat funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, hvis forskrift ikke kendes, oplyses følgende:

$$f(0,1)=1\,,\; f'_x(0,1)=0\,,\; f'_y(0,1)=0\,,\; f''_{xx}(0,1)=1\,,\; f''_{yy}(0,1)=0\,,\; f''_{xy}(0,1)=-1\,.$$

1. Opstil det approksimerende polynomium $P_2(x,y)$ af anden grad for f med udviklingspunktet $(x_0,y_0)=(0,1)$.
2. Gør rede for at f hverken har lokalt maksimum eller lokalt minimum i punktet $(x_0,y_0)=(0,1)$.

OPGAVE 2

Et afsluttet og begrænset område M i (x,y)-planen er afgrænset af den cirkel som er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u)=\big(\cos(u),\sin(u)\big)\,,\; u\in[0,\,2\pi]\,.$$

Vi betragter funktionen

$$f(x,y)=x^2+y^2+x\,.$$

1. Bestem samtlige stationære punkter for f i det indre af M.
2. Bestem forskriften for den sammensatte funktion
$$f\big(\mathbf{r}(u)\big)\,,\; u\in[0,\,2\pi]\,.$$
3. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af f på M.

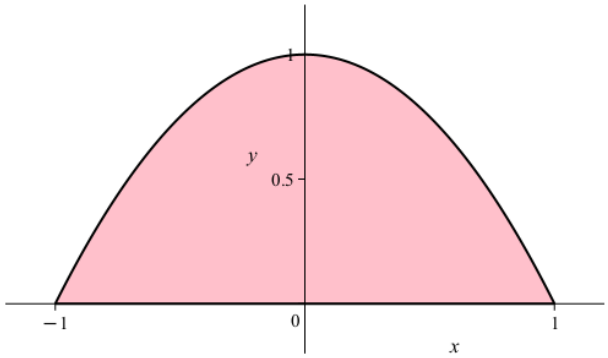
Opgavesættet fortsætter på næste side

OPGAVE 3

Et område A i (x,y)-planen er er givet ved

$$A = \left\{(x,y) \,|\, -1 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq 1 - x^2 \right\} ,$$

se figuren



Endvidere er en flade F givet ved den del af grafen for funktionen

$$h(x,y) = 1 - y - x^2$$

som opfylder $y \geq 0$ og $z \geq 0$.

a) Bestem en parameterfremstilling for A.
Bestem en parameterfremstilling for F. *Vink*: Find din egen parameterfremstilling for F, eller gør rede for at

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v(1-u^2), 1 - v(1-u^2) - u^2\right) , \; u \in [-1,1] , \; v \in [0,1]$$

er en mulig parameterfremstilling for F.

Lad B betegne det afsluttede rumlige område der ligger (lodret) mellem A og F.

b) Bestem en parameterfremstilling for B og angiv den til B hørende Jacobi-funktion.

c) Bestem rumfanget af B.

OPGAVE 4

Vi betragter den massive kugle K i (x,y,z)-rummet som har centrum $(0,0,0)$ og radius 1.

1. Angiv volumen af K.

Der er givet to vektorfelter ved

$$\mathbf{U}(x,y,z) = (x,y,z) \text{ og } \mathbf{V}(x,y,z) = (x^2 \cdot y, -x \cdot y^2, z^2) .$$

b) Bestem divergensen af $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$.

c) Bestem fluxen af $\mathbf{U}$ såvel som af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen af K.

`Opgavesættet er slut.`