DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 11. maj 2023.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften:

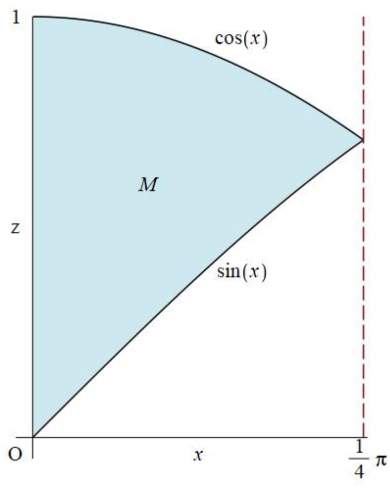
$$f(x,y) = x^2 \cdot y - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 11 \ .$$

1. f har tre stationære punkter, bestem dem.
2. Bestem de punkter i (x,y)-planen hvori f har lokalt maksimum eller lokalt minimum.
3. Parablen med ligningen $y = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$ afgrænser sammen med den rette linje med ligningen $y = 3$ en begrænset og afsluttet punktmængde M. Bestem det globale maksimum og det globale minimum af f på M, og angiv de punkter hvori de antages.

OPGAVE 2

Et område M i (x,z)-planen er givet ved

$$M = \{ (x,z) \,|\, 0 \le x \le \frac{1}{4}\pi \text{ og } \sin(x) \le z \le \cos(x) \} \,.$$



1. Bestem en parameterfremstilling for M, og bestem arealet af M.

Et omdrejningslegeme Ω har parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \begin{bmatrix} u \cdot \cos(w) \\ u \cdot \sin(w) \\ \sin(u) + v \cdot (\cos(u) - \sin(u)) \end{bmatrix} , \ u \in \left[0, \frac{1}{4}\pi\right] , \ v \in [0,1] , \ w \in [0,\pi] \,.$$

2. Bestem den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobi-funktion og bestem voluminet af Ω.

OPGAVE 3

I (x,y)-planen er der givet hastighedsvektorfeltet $\mathbf{V}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$.

1. Bestem den flowkurve $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ for $\mathbf{V}$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

og bestem punktet $\mathbf{r}(\ln(3))$.

En kurve K har parameterfremstillingen $\mathbf{s}(u) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 \end{bmatrix}$, $u \in [0,2]$. Til tiden $t = 0$ begynder K at flyde med $\mathbf{V}$.

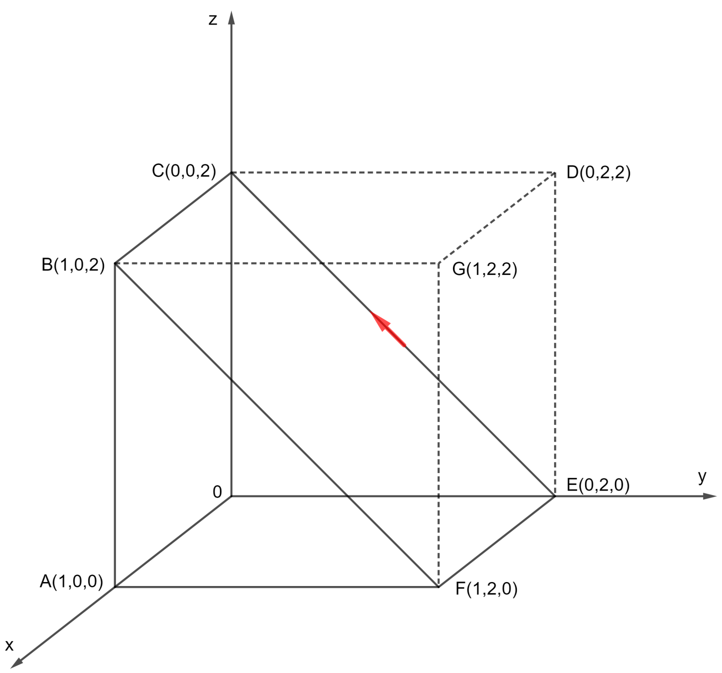
2. Bestem en parameterfremstilling for den kurve som K er blevet omformet til ved tiden $t = \ln(3)$.

OPGAVE 4

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet er givet ved

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (-y \cdot x, y^2 + 5, -y \cdot z + 5 \cdot z).$$

Et prisme P med hjørnerne O, A, B, C, E og F fremkommer ved at en massiv kasse med hjørnerne O, A, B, C, D, E, F og G deles i to dele af planen med ligningen $z = 2 - y$ hvorefter den øverste del (indeholdende punkterne D og G) bortkastes, se figuren.



1. Bestem divergensen og rotationen af $\mathbf{V}$, og angiv rumfanget af P.

2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen ∂P af P.

Lad S betegne den sideflade af P som har hjørnerne B, C, E og F.

3. Bestem en parameterfremstilling for S, og bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂S af S idet ∂S orienteres som antydet ved rød pil på figuren.

`Opgavesættet er slut.`