DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 11. maj 2022.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Om en funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ oplyses de to partielt afledede af første orden:

$$f'_x(x,y)=6x-6y \text{ og } f'_y(x,y)=6y^2-6x\,.$$

1. Bestem samtlige stationære punkter for f.
2. Bestem de partielt afledede af anden orden for f, og opstil Hessematricen for f. Angiv de punkter i (x,y)-planen hvori f har lokalt maksimum eller lokalt minimum.
3. Det oplyses nu, at $f(0,0)=1$. Bestem det approksimerende andengradspolynomium for f med udviklingspunktet $(0,0)$.

OPGAVE 2

Rektanglet M_1 ligger i (x,y)-planen i (x,y,z)-rummet, og det er givet ved:

$$M_1=\{\,(x,y)\,|\,0\le x\le 2\,,\;0\le y\le 1\,\}\,.$$

Vi betragter en funktion $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ givet ved forskriften $h(x,y)=2x-y+1$. Lad G_1 betegne den del af grafen for h som ligger lodret over M_1.

1. Bestem arealet af G_1.

Det rette linjestykke mellem punkterne $(0,1)$ og $(2,0)$ deler M_1 i to dele. Lad M_2 betegne den nederste del, og lad G_2 betegne den del af grafen for h som ligger lodret over M_2.

2. Giv en parameterfremstilling for G_2, og bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.
3. Bestem fladeintegralet af f over G_2, idet f er givet ved forskriften

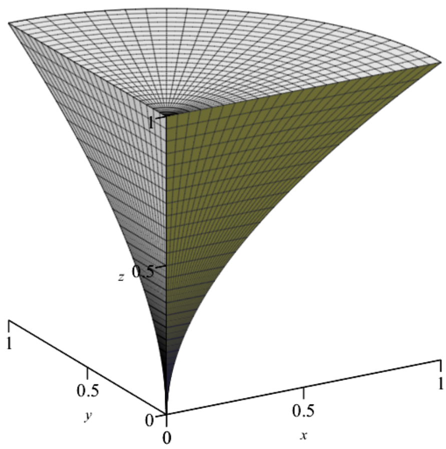
$$f(x,y,z)=x+y+z-1\,,\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

Et massivt legeme L i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \left(v \cdot u^2 \cdot \cos(w),\, v \cdot u^2 \cdot \sin(w),\, u\right),\ u \in [0,\,1],\, v \in [0,\,1]\,,\ w \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right].$$



1. Bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.
2. Vi betragter vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (x + \mathrm{e}^{y \cdot z},\, 2y - \mathrm{e}^{x \cdot z},\, 3z + \mathrm{e}^{x \cdot y})$. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen ∂L af L.
3. L fremkommer ved at et profilområde F i (x,z)-planen (gult på figuren) er drejet en kvart omgang omkring z-aksen mod uret, set fra z-aksens positive ende. Giv en parameterfremstilling for F.

OPGAVE 4

Lad a være et positivt reelt tal. En flow-kurve K for et glat vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet (hvis forskrift ikke er oplyst) er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix},\ t \in [0,\, a].$$

1. Den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobi-funktion kan skrives på formen
$$\mathrm{Jacobi}(t) = \sqrt{\mathrm{e}^{-m \cdot t} + n}$$
hvor m og n er reelle tal. Bestem m og n.
2. Gør rede for at det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs K kan bestemmes ved
$$\int_K \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}\, \mathrm{d}\mu = \int_0^a \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^a \left(\mathrm{Jacobi}(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$
3. Lad nu $a = 5$, og bestem $\int_K \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}\, \mathrm{d}\mu$.

Opgavesættet er slut.