Mat 1. 2-timersprøve den 11. maj 2022

JE 10.5.22

Opgave 1

```
> restart:with(LinearAlgebra):
```

Om en funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oplyses, at de to partielt afledede af første orden er

```
> fx:=6*x-6*y
```

$$fx := 6\,x - 6\,y \tag{1.1}$$

og

```
> fy:=6*y^2-6*x
```

$$fy := 6\,y^2 - 6\,x \tag{1.2}$$

Spørgsmål 1

$\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = (6\,x - 6\,y, 6\,y^2 - 6\,x) = (0, 0) \Leftrightarrow\ 6\,x - 6\,y = 0$ og $6\,y^2 - 6\,x = 0\ \Leftrightarrow$
$x = y$ og $y(y-1) = 0\ \Leftrightarrow\ y = 0$ og $x = 0$ eller $y = 1$ og $x = 1$.
Samtlige stationære punkter for f er da (0, 0) og (1, 1).

Spørgsmål 2

De partielt afledede af anden orden for f er

```
> fxx:=diff(fx,x);fxy:=diff(fx,y);fyy:=diff(fy,y);
```

$$fxx := 6$$
$$fxy := -6$$
$$fyy := 12\,y \tag{1.2.1}$$

Hessematricen for f i punktet (x, y) er

```
> H(x,y):=<fxx,fxy;fxy,fyy>
```

$$H(x, y) := \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12\,y \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

Hvis f har lokalt ekstremum i et punkt, så må punktet være et stationært punkt, da f ikke har undtagelsespunkter.

```
> H(0,0):=subs(x=0,y=0,H(x,y))
```

$$H(0, 0) := \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

```
> Eigenvalues(H(0,0),output=list)
```

$$\left[3 + 3\sqrt{5}, 3 - 3\sqrt{5}\right] \tag{1.2.4}$$

Da de to egenværdier for $\mathbf{H}(0, 0)$ har modsat fortegn, så har f hverken lokalt maksimum eller lokalt mimimum i det stationære punkt (0, 0).

```
> H(1,1):=subs(x=1,y=1,H(x,y))
```

$$H(1, 1) := \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

```
> Eigenvalues(H(1,1),output=list)
```

$$\left[9+3\sqrt{5}, 9-3\sqrt{5}\right] \tag{1.2.6}$$

Da begge egenværdierne for **H**(1, 1) er positive, har f egenligt lokalt minimum i det stationære punkt (1, 1).

Spørgsmål 3

Det oplyses nu, at $f(0, 0) = 1$.
Det approksimerende andengradspolynomium for f i udviklingspunktet (0, 0) er
$P_2(x, y) =$

$$f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}f''_{xx}(0,0)x^2 + f''_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f''_{yy}(0,0)y^2 =$$

$1 + 3x^2 - 6xy$.

Opgave 2

```
> restart:
  with(plots):
  prik:=(x,y)->VectorCalculus[DotProduct](x,y):
  kryds:=(x,y)->convert(VectorCalculus[CrossProduct](x,y),Vector):
  `vekdif`:=proc(X,Y) convert(diff(convert(X,list),Y),Vector) end
  proc:
  `vop`:=proc(X) op(convert(X,list)) end proc:
```

En funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

```
> h:=(x,y)->2*x-y+1
```

$$h := (x, y) \mapsto 2\cdot x - y + 1 \tag{2.1}$$

Rektanglet M_1 ligger i (x, y)-planen i (x, y, z)-rummet og det er givet ved
$M_1 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.
Lad G_1 betegne den del af grafen for h, som ligger lodret over M_1.

Spørgsmål 1

En parameterfremstilling for G_1 er

```
> r:= (u,v)-><u,v,2*u-v+1>:
> r(u,v)
```

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 2u - v + 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

hvor $u \in [0; 2]$ og $v \in [0; 1]$.
Fladens normalvektor er

```
> N:=kryds(diff(r(u,v),u),diff(r(u,v),v))
```

$$N := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Den til **r** hørende Jacobifunktion er

```
> Jacobi:=sqrt(prik(N,N))
```

$$Jacobi := \sqrt{6} \tag{2.1.3}$$

$$\mathrm{Ar}(G_1) = \int_{G_1} 1 \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 \int_0^2 \mathrm{Jacobi}(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{6} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 2\sqrt{6} \, .$$

Det rette liniestykke mellem punkterne (0, 1) og (2, 0) deler M_1 i to dele. Lad M_2 betegne den nederste del og lad G_2 betegne den del af grafen for h, som ligger lodret over M_2 .

Spørgsmål 2

Det rette liniestykke mellem punkterne (0, 1) og (2, 0) har ligningen $y = 1 - \frac{x}{2}$.

En parameterfremstilling for M_2 er da

$\mathbf{r}(u, v) = (u, 0) + v(0, 1 - \frac{u}{2}) = (u, v(1 - \frac{u}{2}))$, hvor $u \in [0 ;2]$ og $v \in [0 ;1]$.

Heraf fås følgende parameterfremstilling for G_2

```
> r:=(u,v)-><u,v*(1-u/2),2*u-v*(1-u/2)+1>:
> r(u,v)
```

$$\begin{bmatrix} u \\ v\left(1 - \frac{u}{2}\right) \\ 2\,u - v\left(1 - \frac{u}{2}\right) + 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

hvor $u \in [0; 2]$ og $v \in [0 ; 1]$.

Fladens normalvektor er

```
> N:=simplify(kryds(diff(r(u,v),u),diff(r(u,v),v)))
```

$$N := \begin{bmatrix} -2 + u \\ 1 - \frac{u}{2} \\ 1 - \frac{u}{2} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

Den til **r** hørende Jacobifunktion er

```
> Jacobi:=sqrt(prik(N,N))assuming -2+u<0
```

$$Jacobi := \frac{\sqrt{6}\,(2 - u)}{2} \tag{2.2.3}$$

Spørgsmål 3

Lad f være givet ved

```
> f:=(x,y,z)->x+y+z-1:
> f(x,y,z)
```

$$x + y + z - 1 \tag{2.3.1}$$

hvor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Det søgte fladeintegral er

$$\int_{G_2} f \, d\mu = \int_0^1 \int_0^2 f(\mathbf{r}(u, v)) \operatorname{Jacobi}(u, v) \, du \, dv$$

```
> integranden:=f(vop(r(u,v)))*Jacobi
```

$$integranden := \frac{3\,u\,\sqrt{6}\,(2-u)}{2} \tag{2.3.2}$$

```
> Int(Int(integranden,u=0..2),v=0..1)=int(int(integranden,u=0..2),v=
  0..1)
```

$$\int_0^1 \int_0^2 \frac{3\,u\,\sqrt{6}\,(2-u)}{2} \, du \, dv = 2\sqrt{6} \tag{2.3.3}$$

Opgave 3

```
> restart:with(LinearAlgebra):with(plots):
```

Et massivt legeme L i (x, y, z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen

```
> r:=(u,v,w)-><v*u^2*cos(w),v*u^2*sin(w),u>:
> r(u,v,w)
```

$$\begin{bmatrix} v\,u^2\cos(w) \\ v\,u^2\sin(w) \\ u \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

hvor $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$ og $w \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (se figuren i opgaveteksten).

Spørgsmål 1

```
> M:=<diff(r(u,v,w),u)|diff(r(u,v,w),v)|diff(r(u,v,w),w)>
```

$$M := \begin{bmatrix} 2\,v\,u\cos(w) & u^2\cos(w) & -v\,u^2\sin(w) \\ 2\,v\,u\sin(w) & u^2\sin(w) & v\,u^2\cos(w) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

```
> Jr:=simplify(Determinant(M))
```

$$Jr := u^4\,v \tag{3.1.2}$$

som er ≥ 0, da $v \geq 0$. Den til **r** hørende Jacobi-funktion er da

```
> Jacobi:=Jr
```

$$Jacobi := u^4\,v \tag{3.1.3}$$

Spørgsmål 2

Vi betragter vektorfeltet

```
> V:=(x,y,z)-><x+exp(y*z),2*y-exp(x*z),3*z+exp(x*y)>:
```

```
> V(x,y,z)
```

$$\begin{bmatrix} x + e^{yz} \\ 2y - e^{xz} \\ 3z + e^{yx} \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

∂L er den lukkede overflade af L orienteret med udadrettet enhedsnormalvektor. Af Gauss' sætning fås da

$$\mathrm{Flux}(\mathbf{V}, \partial L) = \int_L \mathrm{Div}(\mathbf{V})\, d\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{Div}(\mathbf{V})\,(\mathbf{r}(u, v, w))\mathrm{Jacobi}(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

```
> div:=V->VectorCalculus[Divergence](V):
> DivV:=div(V)(x,y,z)
```

$$DivV := 6 \tag{3.2.2}$$

```
> integranden:=DivV*Jacobi
```

$$integranden := 6u^4 v \tag{3.2.3}$$

```
> Int(integranden,[u=0..1,v=0..1,w=0..Pi/2])=int(integranden,[u=0.
  .1,v=0..1,w=0..Pi/2])
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^1 6u^4 v\, du\, dv\, dw = \frac{3\pi}{10} \tag{3.2.4}$$

Spørgsmål 3

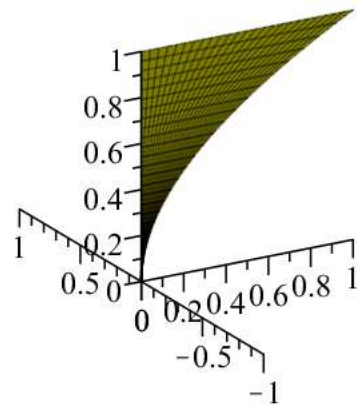
En parameterfremstilling for et profilområde F i (x, z)-planen, som frembringer L på den beskrevne måde fås ved at sætte $w = 0$ i den givne parameterfremstilling for L.

```
> s:=(u,v)-><v*u^2,0,u>:
> s(u,v)
```

$$\begin{bmatrix} v u^2 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$.

```
> plot3d(s(u,v),u=0..1,v=0..1,scaling=constrained,axes=normal,view=
  0..1,orientation=[-120,70],color=yellow)
```



Opgave 4

```
> restart:with(plots):with(LinearAlgebra):
  prik:=(x,y)->VectorCalculus[DotProduct](x,y):
  vop:=proc(X)op(convert(X,list))end proc:
```

Lad a være et positivt reelt tal. En flow-kurve K for et glat vektorfelt **V** i (x, y, z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen

```
> r:=t-><exp(-t),cos(t)-sin(t),cos(t)+sin(t)>:
> r(t)
```

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

hvor $t \in [0; a]$.

Spørgsmål 1

Den til **r** hørende Jacobi-funktion er

```
> Jacobi:=simplify(sqrt(prik(diff(r(t),t),diff(r(t),t))))
```

$$Jacobi := \sqrt{e^{-2t} + 2} \tag{4.1.1}$$

Dvs m = 2 og n = 2.

Spørgsmål 2

Da K er en flow-kurve for vektorfeltet **V**, så er $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t)$ for alle $t \in [0; a]$. Heraf følger, at

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K) = \int_K \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}\, d\mu = \int_0^a \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^a \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^a (\mathrm{Jacobi}(t))^2\, dt .$$

Spørgsmål 3

Sættes $a = 5$, så er

```
> Tan:=Int(Jacobi^2,t=0..5)=int(Jacobi^2,t=0..5)
```

$$Tan := \int_0^5 \left(e^{-2t} + 2\right) dt = \frac{21}{2} - \frac{e^{-10}}{2} \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

```
> kurve:=spacecurve(r(t),t=0..5,color=red,axes=normal):
  pkt:=pointplot3d([[1,1,1],[vop(r(5))]],symbol=solidcircle,
  symbolsize=15):
> display(kurve,pkt,tickmarks=[3,3,3],scaling=constrained,
  orientation=[-65,80,0]);
```