DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 6. december 2022.
Kursusnavn: Matematik 1. **Kursusnr.** 01005/01015
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Lad a, b og c være vilkårlige reelle tal. Vi betragter matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

og vektorerne $\mathbf{v}_1 = (7, 1, -3)$ og $\mathbf{v}_2 = (4, b, c)$.

1. Lad $a = 0$. Bestem på standardparameterform den fuldstændige løsning til matrixligningen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1\,.$$

2. Lad $a = 2$. Bestem de værdier af b og c for hvilke matrixligningen

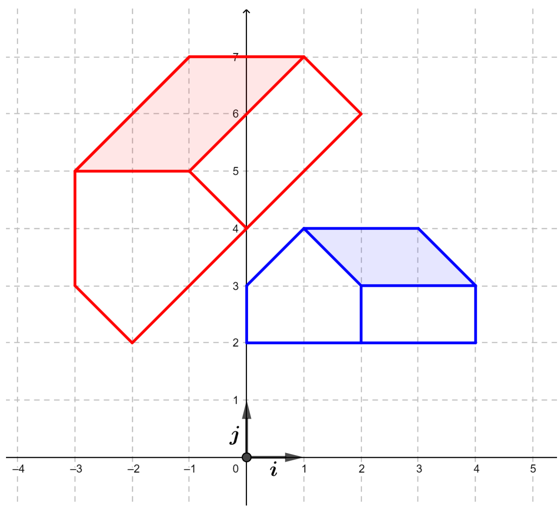
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_2$$

har løsninger.

OPGAVE 2

Lad $G2$ betegne mængden af vektorer i planen som tænkes afsat ud fra Origo i et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, hvori standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes e.

En lineær afbildning $f : G2 \to G2$ er nedenfor illustreret således: Et blåt punkt P med stedvektor $\overrightarrow{OP}$ afbildes i et rødt punkt som er endepunktet for $f(\overrightarrow{OP})$. Den røde figur er således billedet ved f af den blå figur.



Vi betragter vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ givet ved ${}_e\mathbf{v}_1 = (3,4)$ og ${}_e\mathbf{v}_2 = (0,2)$.

1. Gør rede for at vektorsættet $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en ny basis for $G2$. Bestem basisskiftematricen ${}_e\mathbf{M}_v$.

2. Find billedvektorerne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$, og bestem afbildningsmatricerne ${}_e\mathbf{F}_v$ og ${}_e\mathbf{F}_e$ for f.

3. Vektoren $\mathbf{w}$ er givet ved ${}_e\mathbf{w} = (1,4)$. Bestem vinklen mellem $\mathbf{w}$ og dens billede $f(\mathbf{w})$. Gør rede for at vinklen mellem en vilkårlig anden egentlig vektor og dens billedvektor er identisk med vinklen mellem $\mathbf{w}$ og $f(\mathbf{w})$.

OPGAVE 3

Om en reel 3×3 matrix $\mathbf{A}$ er der oplyst dens karakteristiske polynomium på fuldstændig faktoriseret form:

$$P(\lambda) = (\lambda + 2) \cdot \left(\lambda - 1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(\lambda - 1 - \frac{i}{2}\right), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

1. Opskriv egenværdierne for $\mathbf{A}$.

2. Det oplyses videre at vektoren $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$ tilhører egenrummet E_{-2}, og at vektoren $\mathbf{u}_2 = (0, i, -1)$ tilhører egenrummet $E_{1-\frac{i}{2}}$. Bestem på den baggrund $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1$ og $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2$.

3. Angiv en 3×3 matrix som stemmer overens med de oplysninger der er givet ovenfor om $\mathbf{A}$.

OPGAVE 4

Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem $\mathbf{A}$'s egenværdier, og angiv for hver af dem en tilhørende egentlig egenvektor.

Et inhomogent lineært differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1'(t) + 3x_1(t) &= -1 + 6t \\ x_2'(t) - 4x_1(t) + 2x_2(t) &= -8t \end{aligned}$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til det til det givne differentialligningssystem svarende homogene differentialligningssystem.

3. Der findes en partikulær løsning $(x_1(t), x_2(t))$ til det givne inhomogene differentialligningssystem hvor $x_1(t) = at + b$ og $x_2(t) = ct + d$. Indsæt dette bud på en partikulær løsning i differentialligningssystemet og bestem derved tallene a, b, c og d.

4. Brug resultaterne i spørgsmål 2 og 3 til at bestemme den fuldstændige løsning til det givne inhomogene differentialligningssystem.