PROJEKT: KOMPLEKS ANALYSE I GEOMETRI

Spørgsmål: Hvad er forbindelsen mellem den ligning $x^2 + 1 = 0$ og sæbe film?
Svar: Weierstrass formel for minimal overflader.
Men hvad er Weierstrass formel, og hvad kan du bruge det til? Dette projekt, der skal appellere til studerende, der er interesseret i teorien om matematik, har til formål at give en introduktion på dette spørgsmål.

På Matematik 1 har vi brugt komplekse tals *algebraiske* egenskaber til at løse opgaver i linære differentialligninger. Algebraisk set, følger de komplekse tal de samme regler som de reelle tal. Men hvad sker, hvis man prøver at definere en *komplese afledning* for en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Her opstår noget nyt, og teorien for komplekse diferentierbare funktioner er et kraftfuldt værtøj, der bruges på mange matematiske områder. For eksempel i geometri, kan man repræsentere en flade som en afbildning fra $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{R}^3$. I dette project får du et hint om hvordan komplekse analyse kan bruges i teorien for flader med *konstant middelkrumning.*

Konstant middelkrumning (CMC) flader er en matematisk model for grænseflader mellem to forskellige former for væske, også kaldet *membraner.* Det eksempel, som alle er bekendt med, er, at sæbe film, som faktisk er *to* grænseflader mellem vand og luft, som er meget tæt sammen. Et eksempel, hvor der kun er én overflade, som du måske har bemærket, er overfladen på toppen af et glas vand. Den buede overflade er skabt af *overfladespænding*: der er en kraft, der trækker vandet molekyler tilbage i væsken, forebyggelse det fra overfyldte.

Overfladespænding skaber en tendens til at minimere området. Matematisk er dette præget af, at fladens *middelkrumning* (som skal defineres på projektet) er *konstant.* Hvis fladen er randen til en massivt legeme, er konstanten typisk forskellig fra nul. Hvis lufttrykket på begge sider af fladen er det samme, så er middelkrumningen nul, d.v.s., en *minimalflade.*

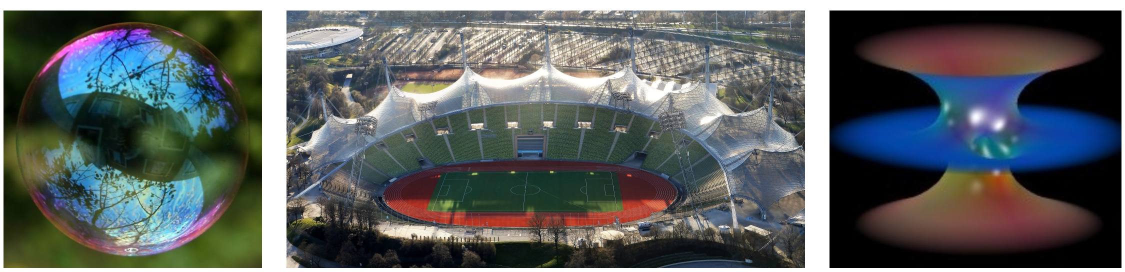

FIGURE 1. Til venstre: En Sæbeboble har middelkrumning forskellig fra nul. Midten: Taget på Münchens olympiske stadion; den overfladespændingsminimerende egenskab gør en mere stabil struktur. Til højre: Mange minimale overflader eksisterer matematisk, som nok findes ikke i naturen.

Dette projekt fokuserer på minimalflader, fordi ikke-minimal CMC flader kræver mere avancerede maskiner. Projektet omfatter at bruge Maple til at forstå nogle geometriske egenskaber af flader i 3-rummet, i særdeleshed Gaussisk og middelkrumning. Du vil derefter lære at bruge den Weierstrass repræsentation, en af de vigtigste redskaber for minimalflade teori, til at undersøge egenskaber for minimalflader gennem eksempler. Du kan evt. overveje spørgsmål som "er en minimal (gennemsnitlig krumning nul) altid område minimeres?", og også bruge Weierstrass formel til at fremstille animationer af deformationer af en minimal overflade til en anden.