

## |||| Hjemmeopgavesæt 7

# Integration i vektorfelter

Deadline er 10/4, 23:55. Alle tre opgaver skal afleveres i en samlet pdf der uploades til din klasses Learn konto. Ingen Möbius-besvarelser i dette sæt. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du kan

- designe passende parametriseringer
- bestemme flow-kurver for et vektorfelt
- bruge integration ved bestemmelse af tangentielt kurveintegral og flux
- bestemme Jacobi-funktioner og forklare deres betydning
- benytte Gauss' sætning
- benytte Stokes' sætning
- lave illustrerende Maple/Sympy-plots
- skrive sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer

### |||| Opgave 1 Flowkurver og divergens i planen

Et førstegradsvektorfelt i  $(x, y)$ -planen er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y) = \left( \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y, -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y \right).$$

- a) Bestem den flowkurve  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  som for et givet punkt  $(x_0, y_0)$  opfylder begyndelsesbetingelsen  $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0)$ .

Betragt et kvadrat  $K$  med hjørnerne  $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  og  $(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ . Til tiden 0 begynder punkterne i  $K$  at flyde med  $\mathbf{V}$ , og vi betegner med  $K_t$  det område de udgør til tiden  $t$ .

- b) Plot  $K_t$  for  $t = 0$ ,  $t = 1$  og  $t = 2$ . Lad  $A(t)$  betegne arealet af  $K_t$ .

Bestem en forskrift for  $A(t)$  og udregn  $\frac{A'(0)}{A(0)}$ . Kommentér.

### ||| Opgave 2 Flux gennem åben flade

En cylinderflade  $\mathcal{F}$  er dels bestemt ved sin ledekurve i  $(x, y)$ -planen:

$$\mathcal{L} : (x, y) = (u - \sin(u), u), u \in [0, 4\pi],$$

og dels ved  $z \in [0, x]$ . Endvidere er vektorfeltet  $\mathbf{V}$  givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y).$$

- Bestem en parameterfremstilling  $\mathbf{r}$  for  $\mathcal{F}$  idet den tænkes orienteret med normalvektor vendt mod  $(x, z)$ -planen.
- Bestem fluxen af  $\mathbf{V}$  gennem fladen  $\mathcal{F}$ .
- Vis at  $\mathbf{V}$  er et gradientfelt, og bestem samtlige stamfunktioner.

### ||| Opgave 3 Flux gennem lukket flade og cirkulation langs randkurve

Et vektorfelt i rummet er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left( x + y, -x + y, \frac{1}{2} z^2 \right).$$

- Bestem divergensen og rotationen af  $\mathbf{V}$ .

En massivt område  $\mathcal{E}$  i  $(x, y, z)$ -rummet har parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (3w \sin(u) \cos(v), 2w \sin(u) \sin(v), 2w \cos(u))$$

hvor  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ ,  $w \in [0, 1]$ .

- Bestem fluxen

$$\int_{\partial \mathcal{E}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial \mathcal{E}} d\mu$$

vha. Gauss' sætning. NB: Enhedsnormalvektorfeltet  $\mathbf{n}_{\partial \mathcal{E}}$  tænkes orienteret ud af  $\Omega$ .

- Gør rede for at

$$\mathbf{s}(v, w) = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}, v, w\right), v \in [-\pi, \pi], w \in [0, 1].$$

beskriver et plant ellipse-område i  $(x, y)$ -planen i rummet. Bestem cirkulationen af  $\mathbf{V}$  langs randkurven af ellipseområdet ved hjælp af Stokes' sætning. NB: Randkurven udstyres med en selvvalgt orientering der vises på en skitse.