Hjemmeopgavesæt 7

Vektoranalyse

Deadline er 9/5, 23:55. Alle opgaver afleveres i pdf på din klasses Learn-konto, husk navn og studienummer øverst i besvarelsen. Som forberedelse til skriftlig eksamen i forårspensum 11/5 er stilen mere fri end ved sædvanlige essay-opgaver, fx kan dine forklaringer være blandet med Maple-udregninger. Umiddelbart efter deadline offentliggøres en facitliste på kursets hjemmeside.

I din besvarelse bør du dokumentere at du kan
- *designe passende parameterfremstillinger*
- *bestemme tangentielle kurveintegraler*
- *bestemme flux gennem åbne flader*
- *benytte Gauss' divergens-sætning*
- *benytte Stokes' rotations-sætning*
- *forstår betydningen af orientering af kurver og flader*
- *udnytte flowkurver for et vektorfelt*
- *bestemme divergens ved volumenbetragtninger*
- *skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Flux ud gennem overfladen af massivt legeme

Lad a og b være to positive reelle tal. Et rumligt område Ω i (x, y, z)-rummet er givet ved

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,,\; 0 \leq x \,,\; 0 \leq y \,,\; 0 \leq z \leq b \right\} .$$

Vi betragter vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (\, x^2 - 2\,x\,z \,,\, 5\,y\,z \,,\, 2\,y\,e^x \,)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for Ω.

r:=(u,v,w)-><u*cos(v),u*sin(v),w>:

u tilhører [0,a]
v tilhører [0,Pi/2]
w tilhører [0,b]

b) Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.

Ved hjælp af Gauss:
Flux = 3/8*Pi*b^2*a^2 + 2/3*b*a^3

|||| Opgave 2 Cirkulation langs randkurven for åben flade

I (x, y, z)-rummet betragtes den udfyldte trekant T som har hjørnerne $A(0, 0, 3)$, $B(0, 2, 0)$ og $C(1, 0, 0)$ samt vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, x, y)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for T. Vink: Start med at parametrisere linjestykket l fra B til C, derefter kan du parametrisere T ved hjælp af linjer fra A til l.

r:=(u,v)-><u*v,v(2-2*u,3-3*v>:   u og v tilhører begge [0,1]

b) Bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂T for T idet orienteringen af ∂T er bestemt ved $ABCA$.

Ved hjælp af Stokes:
Cirkulationen = -11/2

|||| Opgave 3 Tangentielt kurveintegral i gradientfelt. Brug af stamvektorfelt

Betragt i (x, y, z)-rummet vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (2x + 3y,\ 2y + 3x,\ -4z)$ og funktionen

$$F(x, y, z) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot x \cdot y\,,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Find konstanter a, b, c og d således at $\mathbf{V} = \nabla F$.

Ved sammenligning fås:
a:=1:d:=3:c:=-2:b:=1:

b) Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs den højre halvdel af den enhedscirkel i (y, z)-planen som har centrum i $(0, 1, 1)$, idet du selv vælger kurvens orientering.

8 eller -8 afhængig af orientering

c) Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{W}(x, y, z) = (2yz + xz - x^2, -2xz - yz + y^2, y^2 - x^2 + z^2)$$

er et stamvektorfelt for $\mathbf{V}$.

Rot(W) = V

d) En åben flade F er givet ved $F = \left\{(x, y, z) \,|\, z = 4 - x^2 - y^2\,,\ z \geq 0\right\}$.

Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ gennem F idet du først vælg orienteringer af F og randkurven ∂F som opfylder højrekonventionen.

Fluxen = 0

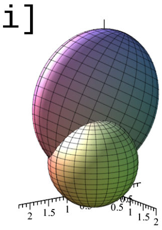
|||| Opgave 4 Flydende objekter og divergens

Om et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x, y, z)-rummet er der oplyst at den flowkurve $\mathbf{r}$ som for et givet punkt (x_0, y_0, z_0) opfylder $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t\left(x_0 \cos(t) - z_0 \sin(t)\right) \\ y_0 \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t\left(x_0 \sin(t) + z_0 \cos(t)\right) \end{bmatrix}.$$

P-fremstilling for Ft:
(exp(t)*(-sin(t)*(1 + cos(u)) + cos(t)*(1 + sin(u)*cos(v))),
(1 + sin(u)*sin(v))*exp(-t),
exp(t)*(sin(t)*(1 + sin(u)*cos(v)) + cos(t)*(1 + cos(u))))
hvor u tilhører [0,Pi] og v tilhører [0,2Pi]

HJEMMEOPGAVESÆT 7



a) En kugleflade F er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u,v) = \begin{bmatrix} \sin(u)\cos(v)+1 \\ \sin(u)\sin(v)+1 \\ \cos(u)+1 \end{bmatrix},\ u \in [0,\pi]\ ,\ v \in [0,2\pi]\ .$$

F begynder til tiden tiden $t=0$ at flyde med vektorfeltet, den derved deformede flade betegnes til tiden t med F_t . Bestem en parameterfremstilling for F_t , og plot F sammen med $F_{\frac{1}{2}}$.

b) En massiv kugle K med radius a og centrum (c_1, c_2, c_3) er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \begin{bmatrix} w\sin(u)\cos(v)+c_1 \\ w\sin(u)\sin(v)+c_2 \\ w\cos(u)+c_3 \end{bmatrix},\ u \in [0,\pi]\ ,\ v \in [0,2\pi]\ ,\ w \in [0,a]\ .$$

K begynder til tiden tiden $t=0$ at flyde med vektorfeltet, og det derved deformede legeme betegnes til tiden t med K_t . Er volumen af K_t afhængigt af værdierne af c_1, c_2 og c_3? Bestem divergensen af $\mathbf{V}$.

Volumen af Kt er uafhængig af c1, c2 og c3.
Derfor er divergensen af V konstant i rummet
og den har værdien Div(V) = 1.