Hjemmeopgavesæt 6

Kurve-, flade- og rumintegraler

Besvarelsen skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen. Deadline er 17/3 23:55.
NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du kan

- *designe passende parametriseringer af enkle kurver og plane områder*
- *beskrive Jacobi-funktionens betydning ved integration*
- *bestemme plan- og kurveintegraler*
- *Designe passende parametriseringer af enkle flader og rumlige områder*
- *beregne fladeintegraler og rumintegraler*
- *benytte illustrerende Maple-plots i dine redegørelser*
- *skrive sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Plan- og kurveintegraler

I (x, y)-planen er der givet funktionen

$$f(x,y) = x + y\,.$$

Lad B betegne den afsluttede og begrænsede punktmængde i $(x,y)-$planen der afgrænses af de to lodrette linjer $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{4}$ og af graferne for $x + \cos(x)$ og $x + \sin(x)$.

a) Giv en parameterfremstilling for B, og bestem den tilhørende Jacobi-funktion. Bestem arealet af B.

b) Bestem planintegralet af f over B.

Betragt den rumkurve $\mathcal{K}$ der fremkommer når kurven $\{(x,y)\,|\,y = 2 \text{ og } 0 \leq x \leq 1\}$ løftes (lodret) op på grafen for f.

c) Giv en parameterfremstilling for $\mathcal{K}$ og bestem den tilhørende Jacobi-funktion. Bestem kurveintegralet $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} x \cdot y \,\mathrm{d}\mu$.

|||| Opgave 2 Flade- og rumintegraler

Et område $\mathcal{A}$ i (x,y)-planen er er givet ved

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 2 \ \text{ og } \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\right\} .$$

Endvidere er en flade $\mathcal{F}$ givet ved den del af grafen for funktionen

$$h\,(x,y) = 4 - y - x^2$$

som opfylder $y \geq 0$ og $z \geq 0$.

a) Bestem en parameterfremstilling for $\mathcal{A}$ og for $\mathcal{F}$, og angiv den til $\mathcal{F}$ hørende Jacobi-funktion.

b) Bestem fladeintegralet af funktionen $f(x,y,z) = \sqrt{12} \cdot y \cdot \sqrt{1 + 2x^2}$ over $\mathcal{F}$.

Lad $\mathcal{B}$ betegne det afsluttede rumlige område der ligger (lodret) mellem $\mathcal{A}$ og $\mathcal{F}$.

c) Bestem en parameterfremstilling for $\mathcal{B}$ og angiv den til $\mathcal{B}$ hørende Jacobi-funktion.

d) Bestem rumfanget af $\mathcal{B}$.

|||| Opgave 3 Omdrejningsflader og rumlige omdrejningsområder

En profilkurve i (x,z)-planen er givet ved punktmængden

$$\{\,(x,z) \mid x = \ln(z)\,,\, z \in [\,2\,,\,4\,]\,\} \ .$$

Profilkurven drejes omkring z-aksen fra retningsvinklen $-\frac{\pi}{4}$ i (x,y)-planen til retningsvinklen $\frac{\pi}{4}$ i (x,y)-planen. Herved fremkommer der en omdrejningsflade $\mathcal{F}$.

a) Bestem en parameterfremstilling dels for profilkurven og dels for $\mathcal{F}$. Bestem den til $\mathcal{F}$ hørende Jacobi-funktion.

b) Bestem fladeintegralet

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{z^2}{\ln(z)}\, d\mu \, .$$

Et profilområde er givet ved punktmængden

$$\left\{(x,z) \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ og } \mathrm{e}^x \leq z \leq \mathrm{e}^2\right\} .$$

Ved drejning af profilområdet med vinklen 2π omkring z-aksen fremkommer et omdrejningslegeme Ω .

c) Bestem en parameterfremstilling dels for profilområdet og dels for Ω . Bestem den til Ω hørende Jacobifunktion.

d) Bestem rumintegralet
$$\int_\Omega y^2 + x^2 \, d\mu \, .$$