

|||| Hjemmeopgavesæt 6

Parametriseringer og Integration

Deadline er 19/3, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Möbius er åben fra torsdag 16/3, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

Generelle læringsmål i dette hjemmeopgavesæt er:

- designe passende parameterfremstillinger for geometriske objekter i planen og rummet
- finde og benytte Jacobi-funktioner svarende til givne parameterfremstillinger
- udregne kurve-, plan-, flade- og rumintegraler
- kan bruge disse til udregne længder, arealer, rumfang og masser
- anvende såvel elementær som Maple/Sympy teknik til integration
- kan lave passende illustrationer i Maple/Sympy
- kan skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer

|||| Opgave 1 Rumligt område mellem to planer. Besvares i Möbius

Et begrænset og afsluttet område A i (x, y) -planens 1. kvadrant er afgrænset af hyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 3^2$, den rette linje med ligningen $y = \frac{4}{5}x$ og x -aksen.

- a) Lav et plot af A . Opstil en parameterfremstilling for A , og angiv den tilhørende Jacobi-funktion.
- b) Bestem arealet af A , og bestem massecentret på A ved den massetæthedsfunktion der overalt har værdien 1.

Vi indfører nu to planer i (x, y, z) -rummet som har ligningerne

$$z = -\frac{1}{4}y + 1 \quad \text{og} \quad z = -\frac{1}{8}y + \frac{1}{2}.$$

Lad Ω betegne det rumlige område der ligger lodret over A mellem de to planer.

- c) Opstil en parameterfremstilling $\mathbf{r}$ for Ω og bestem dens tilhørende Jacobifunktion.
- d) En funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$f(x, y, z) = z.$$

Bestem rumintegralet

$$\int_{\Omega_r} f \, d\mu.$$

|||| Opgave 2 Omdrejningsflader og omdrejningslegemer. Besvares i Möbius

Givet to reelle tal a og b med $a \geq \sqrt{2}$ og $0 \leq b \leq \frac{\pi}{2}$.

En profilkurve K i (x, z) -planen er givet ved

$$K = \left\{ (x, z) \mid x = \ln(z), z \in [\sqrt{2}, a] \right\}.$$

K drejes omkring z -aksen fra retningsvinklen $-b$ til retningsvinklen b i (x, y) -planen. Herved fremkommer der en omdrejningsflade F_{ab} .

- a) Bestem en parameterfremstilling for K og for F_{ab} . Bestem den til F_{ab} hørende Jacobi-funktion.
- b) Bestem fladeintegralet

$$\int_{F_{ab}} \frac{z^2}{x} \, d\mu$$

med værdierne $a = 2\sqrt{2}$ og $b = \frac{\pi}{6}$.

- c) Fladeintegralet i forrige spørgsmål ønskes 10-doblet ved at gøre enten a eller b større. Lav et plot af F_{ab} der indeholder begge varianter af den udvidede flade. Hvilken er størst i areal?

|||| Opgave 3 Grafflade og rumligt område afgrænset af grafflade. Essayopgave

Et område A i (x, y) -planen er givet ved

$$A = \left\{ (x, y) \mid x \geq -1 \text{ og } 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x^2 \right\}.$$

Vi betragter fladen F som er den del af grafen for funktionen $h(x, y) = 2 - \frac{1}{2}x^2 - y$ der ligger lodret over A .

- a) Bestem en parameterfremstilling for A og for F , og angiv den til F hørende Jacobi-funktion.
- b) Bestem fladeintegralet af funktionen $f(x, y, z) = \frac{y^2}{\sqrt{2 + x^2}}$ over F .
- c) Lav et plot af F hvor dens randkurve ∂F er markeret, og bestem $\int_{\partial F} 6x \, d\mu$.

Lad B betegne det afsluttede rumlige område der ligger lodret mellem A og F .

- d) Bestem en parameterfremstilling for B og angiv den til B hørende Jacobi-funktion.
- e) Bestem rumfanget af B .