Hjemmeopgavesæt 5

Differentiable funktioner af to variable

Besvarelsen skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen. Deadline er 25/2, 23:55.

I evaluering af din besvarelse vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan karakterisere definitionsmængder*
- *kan håndtere niveaukurver og gradienter*
- *kan parametrisere kurver og finde tangentvektorer*
- *kan finde stationære punkter og afgøre om de er lokale ekstrema*
- *kan give geometrisk fortolkning af andengradsligninger i x og y*
- *kan finde globale ekstrema på begrænsede, afsluttede mængder*
- *kan bruge passende plots ved undersøgelser og formidling*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Undersøgelse af en funktion af to variable

En funktion f af to variable er givet ved forskriften

$$f(x,y) = \sqrt{x - y^2 + 1}\,.$$

Endvidere betragtes punktet $P = (1,1)$.

a) Gør rede for at niveaukurven K_0 for f er en parabel, og beskriv definitionsmængden $Dm(f)$ for f.

b) En niveaukurve K_c går gennem P. Bestem tallet c og giv en parameterfremstilling for K_c. Lav en illustration hvori den ved parameterfremstillingen bestemte tangentvektor og gradienten af f i P indgår. Begrund uden yderligere udregninger at den retningsafledede af f i P i tangentvektorens retning er lig med 0.

c) Begrund at f ikke har stationære punkter.

|||| Opgave 2 Taylorpolynomium og keglesnitsbestemmelse

En reel funktion af to reelle variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2y^2 - 4xy^2 + xy + 4y^2 - 2y + 1 \,.$$

Det approksimerende polynomium af anden grad for $f(x,y)$ med udviklingspunktet $(x_0, y_0) = (2, 0)$ kaldes i det følgende $P_2(x,y)$.

a) Bestem $P_2(x,y)$.

b) Ligningen $P_2(x,y) = 0$ beskriver en hyperbel i (x,y)-planen. Bestem en ligning for hyperblen, og angiv dens centrum og halvakser.

|||| Opgave 3 Ekstremumsundersøgelser

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$f(x,y) = y \cdot \mathrm{e}^{x(1-y^2)} \,.$$

a) Bestem samtlige stationære punkter for f, undersøg om f har lokalt ekstremum i dem.

b) Bestem det globale maksimum og det globale minimum af f på punktmængden

$$A = \{(x,y) \mid x \in [-1,1] \;\text{ og }\; y \in [-1,1]\} \,,$$

og angiv de punkter hvori de antages.