

|||| Hjemmeopgavesæt 5

Differentiable funktioner af to variable

Deadline er 26/2, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius hvor de kan være tvistede i forhold til her. Möbius er åben fra torsdag 23/2, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du

- kan give geometrisk fortolkning af andengradsligninger i x og y
- kan opstille og benytte parametriserede kurver i planen og rummet ved lokale undersøgelser
- kan benytte Hessematricen ved lokale ekstremumsundersøgelser
- kan finde globale ekstrema på begrænsede, afsluttede mængder
- kan bruge passende plots ved undersøgelser og formidling
- skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer

|||| Opgave 1 Undersøgelse af funktion af to variable. Besvares i Möbius

En funktion f af to variable er givet ved forskriften

$$f(x, y) = \ln(1 - x \cdot y).$$

- Beskriv definitionsområdet $D_m(f)$ for f .
- Givet punktet $P = (-1, 2)$. Bestem gradienten af f i P . Bestem den retningsafledede af f i P i retningen mod Origo. Bestem de retninger fra P hvori den retningsafledede er positiv.
- Vis at f har netop ét netop stationært punkt, og undersøg om f har lokalt ekstremum der. Angiv navnet på den type andengradsflade som er graf for det approksimerende andengradspolynomium for f i det fundne stationære punkt.

- d) Gør rede for at niveaukurven $K_{\ln(2)}$ for f er den eneste punktmængde i $Dm(f)$ hvori Hessematrixen for f har en egen værdi lig med 0. Beskriv det område i $Dm(f)$ hvori Hessematrixen for f har to egen værdier med samme fortegn. Hvilken type andengradsflade er grafer for de approksimerende andengradspolynomier for f som har deres udviklingspunkt i det nævnte område?

|||| Opgave 2 Særundersøgelse af stationære punkter. Besvares i Möbius

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x^4 + \frac{1}{16} x^2 y^2 + 2x^2 y + \frac{1}{8} y^3 - \frac{17}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y + 1.$$

En kurve K i (x, y) -planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} u, -2u^2 + 2 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}.$$

- a) Lad h være højdefunktionen, der for enhver værdi af u angiver den lodrette afstand, regnet med fortegn, fra K til grafen for f . Bestem en forskrift for h , og lav et plot hvor du har løftet K op på grafen for f . Bestem de værdier af u hvori differentialkvotienten af h er henholdsvis 0, negativ og positiv.

Det oplyses at f har to stationære punkter. I det første som vi kalder Q , har f egentligt lokalt ekstremum. I det andet som vi kalder R , har Hessematrixen egen værdien 0.

- b) Bestem Q og angiv den lokale ekstremumsværdi i Q . Bestem den største fejl man begår, hvis man benytter det approksimerende andengradspolynomium P_2 med udviklingspunktet Q i stedet for f på den begrænsede og afsluttede punktmængde der er afgrænset af linjerne $x = -1/3$, $x = 1/3$, $y = -1$ og $y = -1/3$.
- c) Bestem R , og vis at restriktionen af f til alle rette linjer gennem R har lokalt minimum i R . Kan vi på den baggrund slutte at f har lokalt minimum i R ? HAR f lokalt minimum i R ?

|||| Opgave 3 Lokale og globale ekstrema. Essayopgave

I (x, y) -planen er et keglesnit givet ved følgende andengradsligning

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

- a) Bestem keglesnittets type, og angiv keglesnittets centrum, halvaksler og symmetriakser. Illustrér.

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y - 4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- b) Bestem samtlige lokale ekstrema for f , og angiv de steder hvori de antages. Findes der et globalt maksimum og/eller globalt minimum for f på $\mathbb{R}^2$?
- c) En cirkelskive C i (x, y) -planen er givet ved

$$\left\{ (x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 16 \right\}.$$

Niveaukurven K_{56} for f deler C i to begrænsede punktmængder hvis afslutninger vi betragter. Bestem det globale maksimum og det globale minimum af f på hver af de to dele, og angiv de punkter hvori de antages. Illustrér.