Hjemmeopgavesæt 4

Egenværdiproblemer

I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan løse systemer af differentialligninger ved diagonaliseringsmetoden*
- *kan løse begyndelsesværdiproblemer*
- *kan operere med afbildnings- og basisskiftematricer*
- *forstår egenværdiers og egenvektorers geometriske betydning*
- *kan benytte GramSchmidt-algoritmen*
- *forstår prikproduktets betydning ved længder og vinkler*
- *kan udnytte Maple til undersøgelser og visualisering*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Deadline for upload: Søndag 26. november 23:55: Husk af din besvarelse skal være en pdf.

Opgave 1 Begyndelsesværdiproblem for system af differentialligninger

For $a \in \mathbb{R}$ er et system af differentialligninger givet på matrixform ved

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{17}{4} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

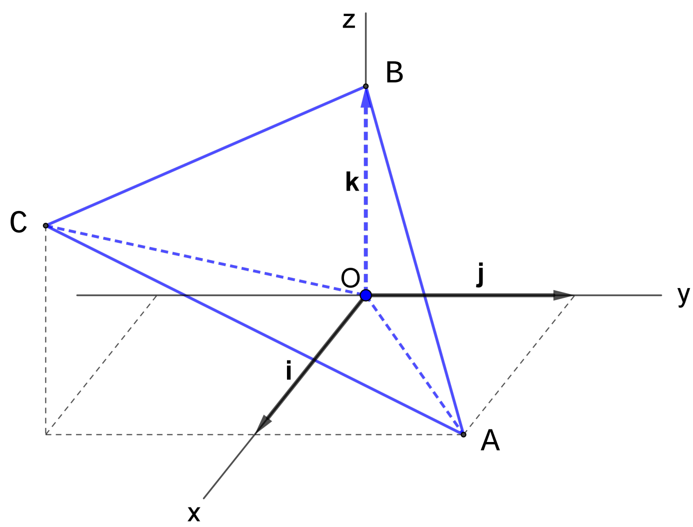
a) Opstil på vektorform den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet, og find de løsninger udtrykt i reelle funktioner som opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Løsningen fundet i forrige spørgsmål ønskes illustreret på to måder. Først tegnes x_1 og x_2 som to funktioner af $t \in [0, 2\pi]$ i samme koordinatsystem. Dernæst tegnes den banekurve punktet (x_1, x_2) gennemløber i tiden $t \in [0, 2\pi]$. Kommentér de to visualiseringer.

|||| Opgave 2 Strækninger i rummet

Et tetraeder T_1 i (x,y,z)-rummet har hjørnerne origo $=(0,0,0)$, $A=(1,1,0)$, $B=(0,0,1)$ og $C=(1,-1,1)$, se figuren.



a) Bestem volumen af T_1.

Vi betragter nu matricen $\mathbf{F}$ givet ved

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Bestem egenværdierne for $\mathbf{F}$ og de tilhørende egenrum.

Lad G_3 betegne mængden af geometriske vektorer i (x,y,z)-rummet afsat ud fra origo. En lineær afbildning $f : G_3 \to G_3$ har med hensyn til standardbasen i G_3 afbildningsmatricen $\mathbf{F}$ som er givet ovenfor.

c) Vi betragter vektorerne $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$. Gør rede at billedvektorerne ved f af de tre vektorer er en skalering (strækning) af de tre vektorer i retningen væk fra origo, og angiv for hver af vektorerne skaleringsfaktoren. Endepunkterne for de tre billedvektorer bestemmer sammen med origo et nyt tetraeder T_2. Find en sammenhæng mellem volumen af T_1 og T_2 og de nævnte skaleringsfaktorer.

d) Hjørnerne i T_1 er selv billedpunkter ved f af hjørnerne i et tetraeder T_0. Bestem volumen af T_0.

|||| Opgave 3 Ortogonale egenrum i $\mathbb{R}^3$

I $\mathbb{R}^3$ betragtes vektoren $\mathbf{u} = (1, -1, -1)$ og underrummet $U_1 = \text{span}\{\mathbf{u}\}$. Lad U_2 betegne det ortogonale komplement i $\mathbb{R}^3$ til U_1 .

a) Bestem en basis for $\mathbb{R}^3$ som er sammensat af en ortonormal basis for U_1 og en ortonormal basis for U_2 .

Lad a og b være vilkårlige reelle tal. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har egenrummene $E_a = U_1$ og $E_b = U_2$.

b) Bestem en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ for f med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

Vi sætter $a = 2$ og $b = -2$.

c) Givet vektorerne $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 0)$ og $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 1)$. Vis at vinklen mellem $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er den samme som vinklen mellem billederne ved f af $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$. Gælder det generelt at vinklen mellem to vektorer er den sammen som vinklen mellem deres billedvektorer?