Hjemmeopgavesæt 3

Vektorrum og Lineære afbildninger

Deadline er 5/11, 23:00. Din besvarelse af de tre opgaver skal afleveres som en samlet pdf-fil på din klasses konto på Learn. Der forventes forklaringer i sædvanlig omfang for metoder og beregninger. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

Ved bedømmelsen vil der blive lagt særlig vægt på at du kan
- *afgøre om en delmængde af et vektorrum er et underrum*
- *bestemme en basis for et underrum*
- *afgøre om en differentialligning er er lineær*
- *benytte gættemetode og Panserformlen*
- *løse differentialligninger med begyndelsesbetingelser*
- *operere med afbildningsmatricer mht. forskellige baser*
- *løse lineære vektorligninger*
- *skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^6$

I $\mathbb{R}^6$ er der givet vektorerne

$$\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0,1,0)\,,\ \mathbf{a}_2 = (1,1,2,1,2,-1)\ \text{ og }\ \mathbf{a}_3 = (0,1,1,1,1,-1)\,.$$

a) Vis at vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ udspænder et to-dimensionalt underrum U i $\mathbb{R}^6$.

b) Vi betragter nu

$$\mathbf{b}_1 = (4,-4,0,-4,0,4)\ \text{ og }\ \mathbf{b}_2 = (-3,2,-1,2,-1,-2)\,.$$

Vis at sættet $(\mathbf{b}_1\,, \mathbf{b}_2)$ er en basis for underrummet U fra spørgsmål a) ovenfor.

Opgave 2 Begyndelsesværdiproblemer

For $a \in \mathbb{R}$ betragtes førsteordens differentialligningen

$$x'(t) + 2tx(t) = 1 + 2t^2 \, , \; t \in \mathbb{R} \, . \tag{1}$$

a) Gør rede for at (1) er lineær.

b) Find ved gættemetoden et førstegradspolynomium som er en løsning til (1). Bestem derefter løsningen til den til (1) svarende homogene ligning. Brug til sidst struktursætningen til at opstille den fuldstændige løsning til (1).

c) Løs nu alternativt (1) ved hjælp af Panserformlen. (Vink: Find først den afledede af te^{t^2})

d) Plot de løsninger til (1) som opfylder begyndelsesværdibetingelserne:

$$x(-1) = 0, \; x(0) = 0, \; x(0) = \mathrm{e} \;\text{ og }\; x(1) = 2 \, ,$$

og kommentér.

Opgave 3 Lineær afbildning i talrummet $\mathbb{R}^3$

Lad $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ betegne standardbasis for $\mathbb{R}^3$. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er fastlagt ved

$$f(\mathbf{e}_1) = (1, 3, -1), \; f(\mathbf{e}_2) = (-2, -2, 2) \;\text{ og }\; f(\mathbf{e}_3) = (3, 3, -3) \, .$$

a) Opskriv afbildningsmatricen for f med hensyn til basis e.

b) Bestem en basis for kernen for f, og angiv dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

c) Givet vektorerne $\mathbf{a}_1 = (2, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1)$ og $\mathbf{a}_3 = (2, -3, -2)$. Gør rede for at sættet $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

d) Angiv afbildningsmatricen for f med hensyn til basis a.

e) Bestem tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ hvis billedvektorer ved f er givet ved koordinatvektoren $(0, 2, 0)$ med hensyn til basis a.