

|||| Hjemmeopgavesæt 2

Lineære ligningssystemer

Deadline: 15. oktober kl. 23:55. Din besvarelse af de tre opgaver skal afleveres som en samlet pdf-fil på din klasses konto på Learn. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

Der forventes forklaringer i sædvanlig omfang for metoder og beregninger. I vurderingen af essayopgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du kan

- analysere matematiske problemer vha. lineære ligningssystemer
- gå fra et ligningssystem til dets koefficient- og totalmatrix
- anvende rækkeoperationer til GaussJordan-elimination
- udnytte matrixers rang ved løsning af lineære ligningssystemer
- gå fra en reduceret totalmatrix til standardparameterform for løsningsmængden
- kan finde den inverse matrix til en invertibel matrix
- benytte Maple/Sympy til illustrerende plots
- skrive sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer

|||| Opgave 1 Matrixligninger

To matrixer er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Opstil på standardparameterform løsningsmængderne for de to matrixligninger

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Vis at alle løsninger til den sidstnævnte matrixligning i spørgsmål a) også er løsninger til den førstnævnte.

||| Opgave 2 Geometrisk tolkning af lineære ligningssystemer

I et sædvanligt retvinklet (x, y, z) -koordinatsystem er fire planer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ og α_4 givet ved ligningerne:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : & -x + 2y + 2z = 6 \\ \alpha_2 : & 2x - y - z = 0 \\ \alpha_3 : & 4x - y - 7z = -2 \\ \alpha_4 : & -x - y + 8z = 3 \end{aligned} \quad (1)$$

- Vis at de fire planer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ og α_4 har netop ét punkt tilfælles ved at betragte rangen af totalmatricen og rangen af koefficientmatricen, og angiv punktet.
- Ligningen for α_1 erstattes nu med $2x - y - z = 2$, mens de øvrige ligninger bevares uændret. Løs det nye ligningssystem. Forklar resultatet i lyset af $\rho(\mathbf{T})$ og $\rho(\mathbf{A})$.
- Ligningen for α_1 erstattes nu med $x - y + 2z = 1$, mens de øvrige ligninger bevares uændret. Samme spørgsmål som i b).
- Brug Maple plotte-kommandoen `implicitplot3d` til at illustrere alle tilfældene ovenfor. Klik på plottet så kan du vende og dreje billedet således at løsningsmængderne ses tydeligt, og fortæl med dine egne ord hvordan løsningsmængderne ses på hver af de tre figurer.

||| Opgave 3 Ligningssystemer indeholdende ukendte koefficienter

Der er givet koefficientmatricen til et homogent lineært ligningssystem:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- Opskriv for $a = 1$ det tilhørende ligningssystem, og find inden for \mathbb{R}^3 samtlige løsninger til det.
- Bestem for enhver værdi af a samtlige reelle løsninger for det lineære ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - a x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + a x_3 &= 0 \\ a x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- For hvilke værdier af a har \mathbf{A} en invers matrix? Find den inverse matrix for $a = 1$ ved hjælp af GaussJordan-elimination.