Hjemmeopgavesæt 1

Komplekse tal og funktioner

I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *behersker elementære udregninger med komplekse tal*
- *kan veksle mellem et komplekst tals rektangulære og eksponentielle form*
- *kender definitionen af et n-te grads polynomium (se Definition 2.1)*
- *kender sammenhæng mellem rødderne i et polynomium og en faktorisering af polynomiet*
- *behersker nedstigningssætningen*
- *kender strukturen af de komplekse rødder til et polynomium med reelle koefficienter*
- *har indsigt i den komplekse eksponentialfunktions struktur*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Dette sæt af opgaver løses ved håndregning (eller simuleret håndregning), i essaystil med nødvendige forklaringer med. Din egen, individuelt udformede besvarelse af sættet uploades som én pdf-fil senest 24. september kl. 23:55 til din klasses Learn-gruppe.

Opgave 1 Polynomier

To polynomium P og Q er for $z \in \mathbb{C}$ givet ved

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 41z - 87 \ \text{ og } \ Q(z) = (z-3) \cdot (10z^3 - 27z^2 - 10z + 3)\,.$$

Vis at $z_0 = 3$ er rod i både P og Q for det ene polynomiums vegne med algebraisk multiplicitet mindst 1 og for det andet polynomiums vegne med algebraisk multiplicitet mindst 2.

a) Find ved brug af Nedstigningssætningen og formler for andengradsligninger samtlige rødder for P og Q.

b) Et nyt polynomium R er for $z \in \mathbb{C}$ givet ved

$$R(z) = P(z) \cdot Q(z)\,.$$

Opskriv R på såvel sædvanlig form $a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ som på fuldstændig faktoriseret form.

Opgave 2 Omskrivninger ml. rektangulær og eksponentiel form

Tre komplekse tal er givet på eksponentiel form således:

$$A = 5\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}i} \quad , \quad 3\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i} \quad \text{og} \quad C = \mathrm{e}^{i\,13\pi}\,.$$

a) Bestem absolutværdi og hovedargument for A, B og C, og bestem deres rektangulære form.

Der er givet to komplekse tal på rektangulær form:

$$D = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \quad \text{og} \quad E = -4\sqrt{3} + 4i\,.$$

b) Bestem de polære koordinater for D og E. Udnyt de to tals eksponentielle form til nemt at bestemme tallet $\dfrac{D^{10}}{E^5}$, først på eksponentiel form dernæst på rektangulær form.

Opgave 3 Løsning af ligninger

a) Givet den trigonometriske ligning

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\,,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Angiv de løsninger til ligningen som ligger i intervallet $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

b) Givet den binome ligning

$$z^6 = -1\,,\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Bestem samtlige løsninger til ligningen, først på eksponentiel form dernæst på rektangulær form. Illustrér.

c) Givet den eksponentielle ligning

$$\mathrm{e}^z = 2i\,,\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Bestem samtlige løsninger til ligningen hvis imaginærdel ligger i intervallet $[-2\pi\,,\,5\pi]$.

SLUT