Hjemmeopgavesæt 1

Komplekse tal og funktioner

I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du

- *behersker elementære udregninger med komplekse tal*
- *kan veksle mellem et komplekst tals rektangulære og eksponentielle form*
- *kender sammenhæng mellem rødderne i et polynomium og en faktorisering af polynomiet*
- *behersker nedstigningssætningen*
- *kender strukturen af de komplekse rødder til et polynomium med reelle koefficienter*
- *har indsigt i den komplekse eksponentialfunktions struktur*
- *kender elementære regler for differentiation og kan opstille approksimerende polynomier*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Dette sæt af opgaver løses ved håndregning (eller simuleret håndregning). Din egen, individuelt udformede besvarelse af sættet uploades som én pdf-fil senest 25. september kl. 23:55 til din klasses Learn-gruppe.

Opgave 1 Polynomier

Polynomium P er givet ved

$$P(z) = (2z^2 - 8z + 58) \cdot (z^4 - 8z^3 + 23z^2 - 30z + 18)\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

a) Bestem graden af P.

b) Det oplyses at P har én rod $z_0 \in \mathbb{Z}$, og at den har algebraisk multiplicitet 2. Find z_0.

c) Bestem samtlige rødder i P og opskriv P på fuldstændig faktoriseret form.

Opgave 2 Omskrivninger ml. rektangulær og eksponentiel form

Tre komplekse tal er givet på eksponentiel form således:

$$3\,\mathrm{e}^{-i\,\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad 7\,\mathrm{e}^{i\,7\pi} \quad \text{og} \quad \mathrm{e}^{i\,\frac{7\pi}{4}} .$$

a) Bestem tallenes absolutværdi og hovedargument, og bestem deres rektangulære form.

Der er givet to komplekse tal på rektangulær form:

$$A = 4\sqrt{3} - 4i \;\; \text{og} \;\; B = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i\,.$$

b) Bestem de polære koordinater for A og B. Udnyt de to tals eksponentielle form til nemt at bestemme tallet $\dfrac{B^6}{A^3}$, først på eksponentiel dernæst rektangulær form.

Opgave 3 Løsning af ligninger

a) Givet den trigonometriske ligning

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Angiv de løsninger som ligger i intervallet $\left[-\pi\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

b) Givet den binome ligning

$$z^8 = 1\,, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Løs ligningen og illustrér.

c) Givet den eksponentielle ligning

$$\mathrm{e}^z = -\mathrm{e}^{2\pi}\,, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Bestem alle de løsninger som har positiv imaginærdel og en absolutværdi i intervallet $[3\pi\,,\,7\pi]$.

|||| Opgave 4 Hyperbolske funktioner

Om to differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oplyses at de opfylder differentialligningssystemet S givet ved

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t) \\ g'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

med begyndelsesværdibetingelserne $f(0) = 1$ og $g(0) = 0$.

a) Vis at punktet $\big(g(t), f(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, i et standard (x, y)-koordinatsystem ligger på *enhedshyperblen* med ligningen $y^2 - x^2 = 1$. Vink: Kig på funktionen

$$h(t) = (f(t))^2 - (g(t))^2\,,\ t \in \mathbb{R}$$

og dens afledede.

b) Gør rede for at de såkaldte *hyperbolske* funktioner $f(t) = \cosh(t)$ og $g(t) = \sinh(t)$, $t \in \mathbb{R}$, opfylder differentialligningssystemet S med de givne begyndelsesbetingelser.

I det følgende betragtes to komplekse funktioner af den reelle variabel t :

$$h_1(t) = \sinh(t) + i \cdot \cosh(t) \ \text{ og } \ h_2(t) = t + i \cdot \sqrt{t^2 + 1}\,.$$

c) Plot $h_1(t)$ og $h_2(t)$ i den komplekse talplan.

d) Lad $P_1(t)$ og $P_2(t)$ betegne de approksimerende 4. gradspolynomier for $h_1(t)$ og $h_2(t)$ med udviklingspunktet $t_0 = 0$. Bestem afstanden mellem punkterne $P_1(t)$ og $P_2(t)$ for $t \in \{0, 1, 2\}$.

SLUT