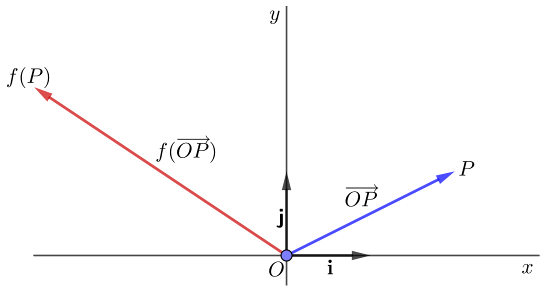
Temaøvelse 3

Lineær transformation i planen og rummet

Deformationer findes allevegne. Væsker, krystaller, bjælker, billeder, bogstaver, skaller, elastikker - alt kan deformeres. Kontinuum-fysik, Differentialgeometri, Fluid dynamik, Styrkelære, Krystallografi, Træteknologi, Ingeniørgeologi, Betonkonstruktioner, Beregninger på geometriske data, Billed-analyse, Transportprocesser, er blot nogle af de områder deformationer studeres. Her ser vi på de simple deformationer som kan beskrives ved lineære transformationer (afbildninger). Specifikt vil vi undersøge om et givet tetraeder kan afbildes over i et andet givet tretraeder ved brug af en lineær afbildning. Men hvad skal vi i det hele taget forstå ved en lineær afbildning af en punktmængde på en anden punktmængde?

Vi indfører følgende regler og konventioner:

- Vi betragter et standardkoordinatsystem $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ i planen.
- Koordinaterne for et vilkårligt punkt P i planen defineres som koordinaterne (x, y) for P's stedvektor $\overrightarrow{OP}$ mht. basis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.
- Vi betragter nu en lineær afbildning f af mængden af vektorer i planen ind i mængden af vektorer i planen. Ved billedet $f(P)$ af punktet P vil vi forstå endepunktet af vektoren $f(\overrightarrow{OP})$ afsat ud fra Origo.



Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

En punktmængde i planen, det kan fx være en kurve eller figur, bliver herved ført over i en anden punktmængde i planen ved at vi lader afbildningen 'virke' på alle punkterne i figuren efter afbildningskonventionen ovenfor.

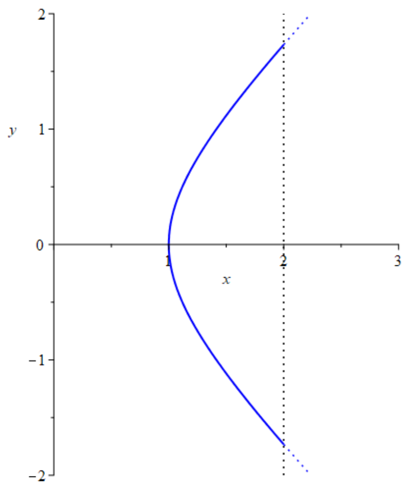
Opgave 1 Tranformation af linjer og kurver

Vi betragter linjestykket fra punktet $A = (1, 1)$ til $B = (4, -2)$ og den lineære afbildning f som er givet ved afbildningsmatricen $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Find $f(A)$ og $f(B)$. Vis at ethvert punkt P på linjestykket fra A til B bliver afbildet på linjestykket fra $f(A)$ til $f(B)$, og at det deler linjestykket fra A til B i samme forhold som $f(P)$ deler linjestykket fra $f(A)$ til $f(B)$.

b) Vis at der generelt gælder at en lineær afbildning afbilder et ret linjestykke på et ret linjestykke, og at billedet af et punkt P deler billed-linjestykket i samme forhold som P deler det givne linjestykke.

For reelle tal a og b er en lineær afbildning g givet ved sin afbildningsmatricen mht. standardbasis: $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Endvidere er en kurve K givet som den del af hyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 1$ der er begrænset af linjerne $x = 0$ og $x = 2$, se figuren.



c) Sæt $a = 1$ og $b = 1$. Find en parameterfremstilling for K og en parameterfremstilling for billedet af K. Plot den vha. SymPy. Hvilken kurve ser vi? Giv en ligning for kurven.

d) Eksperimentér med Maple eller SymPy: Hvad sker der hvis I ændrer på a? Eller på b? Eller dem begge. Hvilke kurver får vi? Vink: Brug Maple's eller SymPy's `implicitplot` på ligningen $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

|||| Opgave 2 Flere lineære transformationer i planen

Vi vedtager nu: En lineær afbildning kaldes regulær hvis den tilhørende afbildningsmatrix er regulær. For en ordens skyld vil vi ligeledes præcisere, at et parallelogram i det følgende betegner et 'rigtigt' parallelogram, dvs. et som har fire sider, hvor hvert par af sider har netop ét punkt fælles (et af hjørnepunkterne).

a) Vi betragter et vilkårlig parallelogram α_1 og en lineær afbildning. Gør rede for:

1. at siderne i α_1 afbildes på siderne i et ny parallelogram α_2 .
2. at et indre punkt i α_1 afbildes på et indre punkt i α_2 .
3. at et indre punkt i α_2 er billedet af et indre punkt i α_1 .

Vink: Opgave 1, spørgsmål b.

Et parallelogram α har hjørnerne $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$ og $(2,1)$ og en lineær afbildning f er givet ved afbildningsmatricen $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ med hensyn til standardbasen.

b) Bestem en parameterfremstilling for α og en parameterfremstilling for $f(\alpha)$.

c) Bestem forholdet mellem arealerne af parallelogrammerne α og $f(\alpha)$. Generelt: Bestem et udtryk for forholdet mellem arealet af et parallelogram og arealet af det billede som det får ved en given lineær afbildning.

|||| Opgave 3 Lineære transformationer i rummet

Vi generaliserer nu vores scenarie til rummet som udstyres med et standard $(0,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$-koordinatsystem.

a) Et tetraeder β_1 har hjørnerne $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ og $(0,0,1)$, mens et andet tetraeder β_2 har hjørnerne $(0,0,0)$, $(4,0,3)$, $(4,-2,1)$ og $(3,0,1)$. Find afbildningsmatricen med hensyn til standardbasen for en lineær afbildning f som opfylder $f(\alpha_1) = \alpha_2$.

b) Argumentér for at der generelt findes en linæer afbildning som afbilder et givet tetraeder med det ene hjørne i Origo i et andet givet tetraeder som også har et hjørne i Origo. Eller måske findes der mere end en?

c) Bestem forholdet mellem voluminerne af de to tetraedere i spørgsmål a. Generelt: Bestem et udtryk for forholdet mellem voluminet af et tetraeder og voluminet af det billede som det får ved en given lineær afbildning.

Temaøvelsesopgaven er slut