Mat 1. 2-timersprøve den 6. december 2022.

JE 5.12.2022

Opgave 1

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Lad a, b og c være vilkårlige reelle tal. Vi betragter matricen

```
> A:=a-><a,1,2,1;1,a,1,2;2,1,a,1>:
> A(a)
```

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

og vektorerne

```
> v1:=<7,1,-3>
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

og

```
> v2:=<4,b,c>
```

$$v2 := \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Spørgsmål 1

$a = 0$. $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}1$.

Totalmatricen er

```
> T:=<A(0)|v1>
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

som har trappeformen

```
> trap('T'):=ReducedRowEchelonForm(T)
```

$$trap(T) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

Sættes $x_4 = t$ fås den fuldstændige løsning til matrixligningen på standardparameterform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål 2

$a = 2$. $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}2$.

Totalmatricen er

```
> T:=<A(2)|v2>
```

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 2 & 1 & c \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

Vi udfører rækkeoperationen

```
> T1:=RowOperation(T,[3,1],-1)
```

$$T1 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-4 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

Ligningen svarende til den sidste række i **T**1 har kun løsninger for $c = 4$. Dvs. c skal være lig med 4.
For $c = 4$ er $\rho(\mathbf{A}(2)) = 2 = \rho(\mathbf{T})$ for alle $b \in \mathbb{R}$ (de to første rækker i **T**1 er ikke proportionale), Dvs. b kan vælges vilkårligt.
Altså. Matrixligningen har løsninger hvis og kun hvis $c = 4$ og b er vilkårlig.

Opgave 2

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

G2 er mængden af vektorer i planen, som tænkes afsat ud fra Origo i et standard (O, **i**, **j**)-koordinatsystem , hvori standard basen (**i**, **j**) betegnes e.

f: G2→G2 er lineær og den røde figur er billedet ved f af den blå figur (se nærmere i opgaveteksten).

Vektorerne **v**1 og **v**2 er givet ved

```
> ev1:=<3,4>
```

$$ev1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

og

```
> ev2:=<0,2>
```

$$ev2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Spørgsmål 1

Da dim(G2) = 2 og da de to vektorer **v**1 og **v**2 er lineært uafhængige, idet de to koordinatvektorer ${}_e\mathbf{v}1$ og ${}_e\mathbf{v}2$ ikke er proportionale,så er (**v**1, **v**2) en ny basis for G2 i det følgende betegnet *v*.

Basisskiftematricen, der skifter fra *v*-koordinater til *e*-koordinater er

```
> eMv:=<ev1|ev2>
```

$$eMv := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

og

basisskiftematricen, der skifter fra *e*-koordinater til *v*-koordinater er

```
> vMe:=eMv^(-1)
```

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Spørgsmål 2

Af figuren aflæses, at

```
> ef(v1):=<-1,7>
```

$$ef(v1) := \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

og

```
> ef(v2):=<-2,2>
```

$$ef(v2) := \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

Herefter fås

```
> eFv:=<ef(v1)|ef(v2)>
```

$$eFv := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

og

```
> eFe:=eFv.vMe
```

$$eFe := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

Spørgsmål 3

Vektoren **w** er givet ved

```
> ew:=<1,4>
```

$$ew := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

og

```
> ef(w):=eFe.ew
```

$$ef(w) := \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Lad u være vinklen mellem **w** og *f*(**w**). Vi har da

```
> cosu:=simplify((1*(-3)+4*5)/(sqrt(1^2+4^2)*sqrt((-3)^2+5^2)))
```

$$cosu := \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.3.3}$$

Dvs. vinklen $u = \frac{\pi}{4}$.

Lad **v** være en vilkårlig anden egentlig vektor givet ved

```
> ev:=<a,b>
```

$$ev := \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

```
> ef(v):=eFe.ev
```

$$ef(v) := \begin{bmatrix} a-b \\ a+b \end{bmatrix} \tag{2.3.5}$$

Lad r være vinklen mellem **v** og *f*(**v**). Vi har da

```
> cosr:=simplify((a*(a-b)+b*(a+b))/(sqrt(a^2+b^2)*sqrt((a-b)^2+(a+b)
  ^2)))
```

$$cosr := \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.3.6}$$

Dvs. vinklen $r = \frac{\pi}{4}$. Altså identisk med vinklen u.

Opgave 3

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Om en reel 3×3 matrix **A** er der oplyst dens karakteristiske polynomiom på fuldstændig faktoriseret form:

$P(\lambda) = (\lambda + 2)\,(\lambda - 1 + \frac{i}{2})\,(\lambda - 1 - \frac{i}{2})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Spørgsmål 1

Da λ er en egenværdi for **A** $\Leftrightarrow$ $P(\lambda) = 0$, så aflæser vi, at **A** har egenværdierne

$\lambda 1 = -2$, $\lambda 2 = 1 - \frac{i}{2}$ og $\lambda 3 = \overline{\lambda 2} = 1 + \frac{i}{2}$.

Spørgsmål 2

Det oplyses videre, at vektoren

```
> u1:=<1,0,0>
```

$$u1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

tilhører egenrummet E_{-2}, og at vektoren

```
> u2:=<0,I,-1>
```

$$u2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

tilhører egenrummet $E_{1 - \frac{i}{2}}$.

Heraf fås, at

```
> Au1:=-2*u1
```

$$Au1 := \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

og at

```
> Au2:=(1-I/2)*u2
```

$$Au2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \mathrm{I} \\ -1 + \frac{\mathrm{I}}{2} \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Spørgsmål 3

Da **A** er en reel 3×3 matrix og da λ3 er den konjugerede af λ2, så er den konjugerede af **u**2

```
> u3:=conjugate(u2)
```

$$u3 := \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{I} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

en egenvektor for **A** hørende til egenværdien λ3.

$\mathbf{u}1 \in \mathrm{E}_{-2}$, $\mathbf{u}2 \in \mathrm{U}_{1-\frac{i}{2}}$ og $\mathbf{u}3 \in \mathrm{U}_{1+\frac{i}{2}}$ er tre lineært uafhængige egenvektorer for **A** idet de tilhørende egenværdier er forskellige.

Sættes

```
> U:=<u1|u2|u3>
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

og

```
> Lambda:=DiagonalMatrix([-2,1-I/2,1+I/2])
```

$$\Lambda := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\mathrm{I}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\mathrm{I}}{2} \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

så er **U** regulær og $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{U}\;\mathbf{\Lambda}\;\mathbf{U}^{-1}$.

```
> A:=U.Lambda.U^(-1)
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

Det bemærkes, at **A** er afhængig af den valgte rækkefølge af egenvektorerne.
Vi ser, at

```
> Eigenvectors(A,output=list)
```

$$\left[\left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\right], \left[1+\frac{I}{2}, 1, \left\{\begin{bmatrix}0\\I\\1\end{bmatrix}\right\}\right], \left[1-\frac{I}{2}, 1, \left\{\begin{bmatrix}0\\-I\\1\end{bmatrix}\right\}\right]\right] \quad \textbf{(3.3.5)}$$

som forventet, idet det bemærkes, at hvis **u** er en egenvektor for **A** hørende til egenværdien λ, så er **-u** også en egenvektor for **A** hørende til egenværdien λ.

Opgave 4

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Givet matricen

```
> A:=<-3,0;4,-2>
```

$$A := \begin{bmatrix}-3 & 0\\4 & -2\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

Spørgsmål 1

```
> Eigenvectors(A,output=list)
```

$$\left[\left[-2, 1, \left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right], \left[-3, 1, \left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\1\end{bmatrix}\right\}\right]\right] \quad \textbf{(4.1.1)}$$

Heraf aflæses, at **A** har egenværdierne -2 og -3 og at **v**1 = $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ er en egentlig egenvektor for **A** hørende til egenværdien -2 og at **v**2 = $\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\1\end{bmatrix}$ er en egentlig egenvektor for **A** hørende til egenværdien -3.
Det bemærkes, at de to egenvektorer **v**1 og **v**2 er lineært uafhængige, da de tilhørende egenværdier er forskellige.

Et inhomogent lineært differentialligningssystem er givet ved
$x_1'(t) + 3x_1(t) = -1 + 6\,t$
$x_2'(t) - 4x_1(t) + 2x_2(t) = -8\,t$
eller på matrixform

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & 0\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1+6\,t\\-8\,t\end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål 2

Det tilsvarende homogene differentialligningssystem er

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Da systemmatricen netop er den givne matrix **A**, så følger det af spørgsmål 1, at den fuldstændige løsning er

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \ t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål 3

Ved indsætning fås, at $(x_1(t), x_2(t)) = (at+b, ct+d)$ er en partikulær løsning til det givne inhomogene differentialligningssystem hvis og kun hvis

```
> diff(a*t+b,t)+3*(a*t+b)=-1+6*t
```

$$3\,a\,t + a + 3\,b = -1 + 6\,t \tag{4.3.1}$$

og

```
> diff(c*t+d,t)-4*(a*t+b)+2*(c*t+d)=-8*t
```

$$-4\,a\,t + 2\,c\,t - 4\,b + c + 2\,d = -8\,t \tag{4.3.2}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

Heraf følger

```
> lign1:=3*a=6
```

$$lign1 := 3\,a = 6 \tag{4.3.3}$$

```
> lign2:=a+3*b=-1
```

$$lign2 := a + 3\,b = -1 \tag{4.3.4}$$

```
> lign3:=-4*a+2*c=-8
```

$$lign3 := -4\,a + 2\,c = -8 \tag{4.3.5}$$

```
> lign4:=-4*b+c+2*d=0
```

$$lign4 := -4\,b + c + 2\,d = 0 \tag{4.3.6}$$

```
> solve({lign1,lign2,lign3,lign4},{a,b,c,d})
```

$$\{a = 2, b = -1, c = 0, d = -2\} \tag{4.3.7}$$

Dvs. $(x_1(t), x_2(t)) = (2t-1, -2)$ er en partikulær løsning til det givne inhomogene differentialligningssystem.

Kontrol

```
> diff(2*t-1,t)+3*(2*t-1)=-1+6*t
```

$$-1 + 6\,t = -1 + 6\,t \tag{4.3.8}$$

```
> diff(-2,t)-4*(2*t-1)+2*(-2)=-8*t
```

$$-8\,t = -8\,t \tag{4.3.9}$$

som forventet.

Spørgsmål 4

Af struktursætningen og spørgsmål 2 og spørgsmål 3 fås, at den fuldstændige løsning til det givne inhomogene lineære differentialligningssystem er

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,t - 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_1 \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} t \in \mathbb{R} \,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$