

|||| Hjemmeopgavesæt 7

Flux gennem åbne og lukkede flader

Besvarelsen skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen. Deadline er 14/4 23:55

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du kan

- designe passende parametriseringer
- bestemme stamfunktioner til gradientvektorfelter
- bestemme flux gennem en åben flade
- benytte Gauss' sætning
- benytte Stokes' sætning
- lave illustrerende Maple-plots
- skrive sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer

|||| Opgave 1 Flux gennem åben flade

En cylinderflade \mathcal{F} er dels bestemt ved sin ledekurve i (x, y) -planen:

$$\mathcal{L} : (x, y) = (u - \sin(u), 1 - \cos(u)), u \in [0, 4\pi],$$

og dels ved $z \in [0, y]$. Endvidere er vektorfeltet \mathbf{V} givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y).$$

- Bestem en parameterfremstilling \mathbf{r} for \mathcal{F} (Vink: plot først \mathcal{L} for at danne dig et indtryk af cylinderfladen).
- Bestem fluxen af \mathbf{V} gennem fladen \mathcal{F} .
- Vis at \mathbf{V} er et gradientfelt, og bestem samtlige stamfunktioner.

||| Opgave 2 Flux gennem en lukket flade og cirkulation langs randkurve

NB: Besvarelsen af denne opgave skal indeholde alle mellemregninger.

Et vektorfelt i rummet er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (2x + 2y, -2x + 2y, z^2).$$

- a) Bestem divergensen og rotationen af \mathbf{V} .

En massivt område \mathcal{E} i (x, y, z) -rummet har parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (3w \sin(u) \cos(v), 2w \sin(u) \sin(v), 2w \cos(u))$$

hvor $u \in [0, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, $w \in [0, 1]$.

- b) Bestem fluxen

$$\int_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{E}} \, d\mu$$

både direkte og vha. Gauss' sætning. NB: $\partial\mathcal{E}$ tænkes orienteret med udadrettet enhedsnormalvektorfelt.

- c) Gør rede for at

$$\mathbf{s}(v, w) = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}, v, w\right), \quad v \in [-\pi, \pi], \quad w \in [0, 1].$$

beskriver et plant ellipse-område i (x, y) -planen i rummet. Bestem cirkulationen af \mathbf{V} langs randkurven af ellipseområdet både direkte og ved hjælp af Stokes' sætning. NB: Randkurven udstyres med en selvvalgt orientering der vises på en skitse.

Opgavearket er slut